
BOLLETTINO UNIONE MATEMATICA ITALIANA

GEORGE PÓLYA

Sopra una equazione trascendente trattata da Eulero

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1,
Vol. 5 (1926), n.2, p. 64-68.

Unione Matematica Italiana

<[http:](http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1926_1_5_2_64_0)
[//www.bdim.eu/item?id=BUMI_1926_1_5_2_64_0](http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1926_1_5_2_64_0)>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

Sopra una equazione trascendente trattata da Eulero.

Nota di G. PÓLYA a Zurigo

In una piccola memoria ⁽¹⁾ poco nota ma molto interessante, EULERO si occupa dell'equazione

$$1 - \frac{z^2}{\alpha(\alpha+1)} + \frac{z^4}{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)(\alpha+3)} - \frac{z^6}{\alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+5)} + \dots = 0;$$

α è un parametro positivo; il primo membro è, nella odierna terminologia, una funzione trascendente intera di z che indicheremo con $F_\alpha(z)$. Si ha

$$\begin{aligned} F_1(z) &= \cos z, & F_2(z) &= \frac{\sin z}{z}, \\ F_3(z) &= -\frac{2}{z^2}(\cos z - 1), & F_4(z) &= -\frac{6}{z^3}(\sin z - z). \end{aligned}$$

EULERO osserva che $F_\alpha(z)$ ha, per $\alpha=1$ ed $\alpha=2$, soltanto radici reali e semplici, per $\alpha=3$ sole radici doppie e per $\alpha=4$ non ha radici reali. Egli ne intuisce, con mirabile divinazione, che $F_\alpha(z)$ ha sole radici reali per $0 < \alpha \leq 3$, mentre non ha radici reali per $\alpha > 3$.

Egli non cerca di dimostrare questa asserzione. Egli calcola approssimativamente le minime radici positive di $F_\alpha(z)$ per $\alpha = \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}$ ⁽²⁾ e le quattro radici immaginarie (giacenti simmetricamente) di $F_4(z)$.

⁽¹⁾ Nova Acta Petropolitana, T. 9 (1791), pag. 19-40; N. 684 dell'indice di ENESTRÖM; sarà pubblicato nel T. XVI delle « Opera omnia ».

⁽²⁾ Onde rintracciare qualche eventuale dipendenza con π .

La risoluzione dell'asserzione enunciata da EULERO si stacca anche dal quadro usuale delle ricerche d'oggi, ed è una fortunata combinazione che la risoluzione stessa si possa condurre a termine senza ricorrere a complicati sviluppi ⁽³⁾.

In ciò che segue, voglio confermare l'asserzione di EULERO circa alla realtà delle radici di $F_\alpha(z)$.

1. Dalla serie infinita che definisce $F_\alpha(z)$, si possono verificare senza difficoltà le seguenti formule:

$$(1) \quad (1 - F_\alpha(z)) \alpha(\alpha + 1) = z^2 F_{\alpha+2}(z),$$

$$(2) \quad z F'_\alpha(z) + (\alpha - 1) F_\alpha(z) = (\alpha - 1) F_{\alpha-1}(z),$$

$$(3) \quad F_\alpha(z) = (\alpha - 1) \int_0^1 (1-t)^{\alpha-2} \cos zt dt \quad (\alpha > 1),$$

$$(4) \quad z F_\alpha(z) = (\alpha - 1)(\alpha - 2) \int_0^1 (1-t)^{\alpha-3} \sin zt dt \quad (\alpha > 2).$$

2. Quando x è reale, $x \neq 0$ e $\alpha > 1$, segue da (3)

$$|F_\alpha(x)| < (\alpha - 1) \int_0^1 (1-t)^{\alpha-2} dt = 1,$$

cioè

$$1 - F_\alpha(x) > 0$$

e quindi, in forza di (1),

$$F_{\alpha+2}(x) > 0.$$

Poichè $F_{\alpha+2}(0) = 1$, così $F_{\alpha+2}(x)$ ha per ogni $\alpha > 1$ e per ogni valore reale di x un valore positivo, ciò che era da dimostrare per prima cosa ⁽⁴⁾.

⁽³⁾ Senza conoscere la memoria di EULERO, ho qualche tempo fa discusso la realtà delle radici di $F_\alpha(s)$ per $\alpha \geq 1$. Cfr. Math. Zeitschrift, T. 2, (1918), pag. 352-383, in particolare pag. 379. La presente discussione è diversa da quella, sebbene con essa in relazione.

⁽⁴⁾ $F_{2m}(z)$, m intero positivo, è il termine complementare della serie di MACLAURIN per $\sin z$, divisa per un monomio, e $F_{2m-1}(z)$ ha la stessa relazione con $\cos z$. Con ciò, quanto si è dimostrato si riduce, per α intero, a proprietà note degli sviluppi in serie di $\cos z$ e $\sin z$. Cfr. p. es. G. PÓLYA e G. SZEGÖ, *Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis*, (Berlin 1925), Aufgabe I, 142.

3. Rimane da considerare il caso alquanto più difficile $0 < \alpha < 3$. Mi giovo all'uopo della seguente proposizione, ch'io ritengo nuova.

Lemma I. *La funzione $f(t)$ sia definita per $-1 \leq t < 1$, non mai negativa nè decrescente, ed il suo integrale sia, nell'intervallo $-1 < t < 1$, finito e diverso da zero; precisamente*

$$f(t) \geq 0, \quad (f(t') - f(t))(t' - t) \geq 0, \quad \int_{-1}^{+1} f(t) dt > 0.$$

La funzione $\varphi(t)$ sia reale e a derivata continua per $-1 \leq t \leq 1$. Infine, gli zeri del polinomio $P(z)$ siano nel semipiano sinistro chiuso (cioè nel campo ove è $\Re(z) \leq 0$). Sotto queste condizioni, gli zeri del polinomio

$$(5) \quad P^*(z) = \int_{-1}^1 f(t) \frac{d}{dt} \left[e^{i\varphi(t)} P(z+t) \right] dt$$

sono parimente nel semipiano sinistro chiuso.

Data una funzione $f(t)$ soddisfacente alle condizioni enunciate e dato un numero positivo ε , vi è, come è facile riconoscere, una funzione positiva costantemente crescente e a derivata continua $f^*(t)$, così fatta che i coefficienti di $P^*(z)$ si mutino per meno di ε quando, nell'integrale (5), $f(t)$ viene sostituito con $f^*(t)$. Con ciò, basta dare la dimostrazione nell'ipotesi più restrittiva, che $f(t)$ sia definita per $-1 \leq t \leq 1$ e con derivata continua, ed inoltre tale che sia

$$(6) \quad f(-1) \geq 0, \quad f'(t) > 0.$$

Sia

$$P(z) = A(z-a)(z-a_1)(z-a_2) \dots (z-a_{n-1}).$$

Si ponga, con x, y, α, β reali:

$$(7) \quad \begin{aligned} z &= x + iy, & a &= -\alpha + i\beta, \\ x &> 0, & \alpha &\geq 0, \end{aligned}$$

$$(8) \quad -1 \leq t < 1.$$

Si ha allora

$$-x-1-\alpha < x+t+\alpha < x+1+\alpha,$$

onde

$$(x+t+\alpha)^2 + (y-\beta)^2 < (x+1+\alpha)^2 + (y-\beta)^2,$$

cioè

$$|z+t-a| < |z+1-a|.$$

Trattando nel medesimo modo i rimanenti $n-1$ fattori lineari di $P(z)$, si ottiene, sotto le ipotesi (7) e (8)

$$(9) \quad |P(z+t)| < |P(z+1)|.$$

Ma si ha da (5), mediante integrazione per parti:

$$P^*(z) = f(1)e^{i\varphi(1)}P(z+1) - f(-1)e^{i\varphi(-1)}P(z-1) - \int_{-1}^1 f'(t)e^{i\varphi(t)}P(z+t)dt,$$

onde, presupposte le (7), da (6) e (9):

$$\begin{aligned} P^*(z) &\geq f(1)|P(z+1)| - f(-1)|P(z-1)| - \int_{-1}^1 |f'(t)||P(z+t)|dt \\ &> f(1)|P(z+1)| - f(-1)|P(z+1)| - \int_{-1}^1 |f'(t)||P(z+1)|dt = 0. \end{aligned}$$

In conclusione è $|P^*(x+iy)| > 0$ se è $x > 0$, c. d. d.

4. Mi occorrono ancora alcune proposizioni ausiliari, le quali però sono ben note ⁽⁵⁾.

Lemma II. Se i coefficienti del polinomio $P(z)$ sono reali e le sue radici hanno la parte reale negativa, le radici del polinomio

$$P(iz) - P(-iz)$$

sono reali.

Lemma III. Se il polinomio $P(z)$ ha sole radici reali e β è positivo, anche il polinomio

$$zP'(z) + \beta P(z)$$

ha sole radici reali.

Lemma IV. Se i polinomi $P_1(z)$, $P_2(z)$, $P_3(z)$, ... hanno sole radici reali e convergono in tutto il piano ad una funzione $G(z)$, e precisamente vi convergono uniformemente in ogni dominio chiuso, allora $G(z)$ è una funzione intera senza radici immaginarie.

5. Sia $2 < \alpha < 3$. Si ponga, nel Lemma I:

$$P(z) = \frac{z^{n+1}}{n+1}, \quad \varphi(t) = 0, \quad f(t) = \begin{cases} 0 & \text{per } -1 \leq t < 0, \\ (1-t)^{\alpha-3} & \text{per } 0 \leq t < 1. \end{cases}$$

Ne segue che tutti gli zeri del polinomio

$$\int_0^1 (1-t)^{\alpha-3} (z+t)^n dt$$

giacciono nel semipiano sinistro chiuso. Ivi pure giacciono gli zeri del polinomio

$$\int_0^1 (1-t)^{\alpha-3} \left(1 + \frac{zt}{n}\right)^n dt,$$

⁽⁵⁾ Cfr. p. es. PÓLYA e SZEGÖ, loc. cit. ⁽⁴⁾, Aufgaben, III 25, V 66, III 203.

poichè la rappresentazione $z' = \frac{n}{z}$ porta questo semipiano in sè stesso. Ne segue, dal Lemma II, che il polinomio

$$\frac{(\alpha-1)(\alpha-2)}{z} \int_0^1 (1-t)^{\alpha-3} \frac{1}{2i} \left[\left(1 + \frac{izt}{n}\right)^n - \left(1 - \frac{izt}{n}\right)^n \right] dt = Q_n(z)$$

ha sole radici reali. Lo stesso, per il Lemma III, vale per i polinomi

$$\begin{aligned} \frac{z}{\alpha-1} \frac{dQ_n(z)}{dz} + Q_n(z) &= Q_n^*(z), \\ \frac{z}{\alpha-2} \frac{dQ_n^*(z)}{dz} + Q_n^*(z) &= Q_n^{**}(z); \end{aligned}$$

si osservi che è $\alpha-2 > 0$. Se n tende ad ∞ , i polinomi $Q_n(z)$, $Q_n^*(z)$, $Q_n^{**}(z)$ tendono rispettivamente ad $F_\alpha(z)$, $F_{\alpha-1}(z)$, $F_{\alpha-2}(z)$; si tengano presenti (4) e (2). Con ciò abbiamo, in base al Lemma IV, che $F_\alpha(z)$, $F_{\alpha-1}(z)$, $F_{\alpha-2}(z)$ non hanno zeri immaginari quando è $2 < \alpha < 3$;
c. d. d.

6. Se nelle precedenti considerazioni viene soltanto $P(z)$ specializzato nel modo detto, mentre $f(t)$ e $\varphi(t)$ rimangono generali e sottoposte soltanto alle condizioni del Lemma I, si ha il teorema che la funzione intera

$$\int_{-1}^1 f(t) \frac{d}{dt} [\cos(zt + \varphi(t))] dt$$

ha sole radici reali ⁽⁶⁾. Il Lemma I medesimo si può ottenere, con passaggio al limite, dal seguente teorema puramente algebrico:

Se le radici del polinomio $P(z)$ giacciono nel semipiano sinistro chiuso (dove $\Re(z) \leq 0$), lo stesso vale per il polinomio

$$a_0 P(z-n) + \dots + a_\nu P(z-n+2\nu) + \dots + a_n P(z+n),$$

quando si supponga che gli zeri del polinomio

$$a_0 + \dots + a_\nu z^\nu + \dots + a_n z^n$$

sono tutti entro il cerchio unità chiuso (cioè $|z| \leq 1$).

Io spero, in altra occasione, di potere trattare più ampiamente di questa dipendenza.

⁽⁶⁾ Cfr. loc. cit. ⁽³⁾.