
BOLLETTINO UNIONE MATEMATICA ITALIANA

CESARE RIMINI

Geometria e correnti alternative

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1,
Vol. 5 (1926), n.2, p. 49–60.

Unione Matematica Italiana

<[http:
//www.bdim.eu/item?id=BUMI_1926_1_5_2_49_0](http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1926_1_5_2_49_0)>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione
Matematica Italiana, 1926.

PICCOLE NOTE

Geometria e correnti alternative.

Nota di CESARE RIMINI

II. - APPLICAZIONI (*).

7. Per meglio chiarire i concetti generali esposti nella parte precedente ed al tempo stesso mostrare la feconda portata del metodo, andiamo a farne l'applicazione allo studio del funzionamento delle più importanti macchine a corrente alternativa.

Cominceremo dal trasformatore, che supporremo alimentato con una d. d. p. alternativa costante, di cui indicheremo con $\bar{D}$ la caratteristica. Per lo studio della macchina, partiamo dalla considerazione del flusso *principale* $\bar{\Phi}$, che si concatena cioè con entrambi i circuiti, e le cui alternazioni inducono nelle spirali primarie e secondarie una forza elettromotrice, la cui contraria indichiamo con $\bar{E}$,

$$(1) \quad \bar{E} = jn\omega\bar{\Phi},$$

essendo n il numero delle spire primarie, che supponiamo, per semplicità, uguale a quello delle spire secondarie (rapporto di trasformazione interno uguale ad uno). Se indichiamo con $\bar{I}'$ e $\bar{I}''$ le correnti primaria e secondaria, con $\bar{Z}'$ e $\bar{Z}''$ le impedenze dei circuiti primario e secondario — composte ciascuna della rispettiva resistenza e della reattanza di dispersione, dovuta cioè a quella parte del flusso generato dal rispettivo sistema di spirali, che non si concatena con l'altra —, con $\bar{Z}$ la impedenza del circuito secondario esterno di utilizzazione, si hanno le seguenti relazioni: la

$$(2) \quad \bar{D} - \bar{Z}' \bar{I}' = \bar{E}$$

(*) Continuazione, v. anno V, n. 1, pag. 21.

che esprime la *legge di Ohm* pel circuito primario, la

$$(3) \quad \bar{\mathcal{R}} \Phi = n (\bar{I}' - \bar{I}''),$$

equazione del circuito magnetico del flusso principale, di cui si è indicata con $\bar{\mathcal{R}}$ la riluttanza, e dove si è assunto il verso positivo delle spirali secondarie opposto a quelle delle primarie. Se poi con $\bar{I}_\mu$ si indica la corrente primaria (corrente eccitatrice o magnetizzante) capace di produrre da sola il flusso Φ cioè tale che

$$(3)' \quad \bar{\mathcal{R}} \Phi = n \bar{I}_\mu$$

risulta, confrontando con (3):

$$(3)'' \quad \bar{I}' = \bar{I}_\mu + \bar{I}''$$

mentre, confrontando (1) con (3)', si ha:

$$(4) \quad \bar{Z}_\mu \bar{I}_\mu = \bar{E}$$

avendo posto (impedenza del circuito di eccitazione):

$$\bar{Z}_\mu = \frac{j\omega n^2}{\bar{\mathcal{R}}};$$

infine, la legge di OHM, applicata al secondario in cui è attiva la sola forza elettromotrice $\bar{E}$, dà:

$$(5) \quad \bar{E} = (\bar{Z}' + \bar{Z}) \bar{I}''.$$

Le (2), (3)'', (4) e (5) mostrano che la corrente primaria $\bar{I}'$ coincide con quella che circolerebbe nel ramo principale di un circuito (circuito *equivalente* del trasformatore) derivato sulla

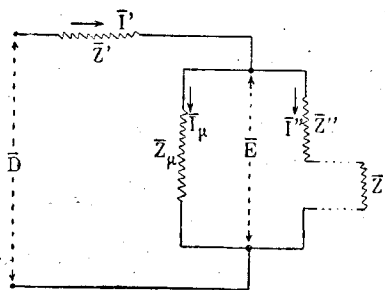


Fig. 1.

d. d. p. $\bar{D}$, ed avente impedenza $\bar{Z}'$, il quale a valle di questa impedenza, ove la d. d. p. si è ridotta ad $\bar{E}$, si biforca in due rami, l'uno di impedenza $\bar{Z}_\mu$, l'altro contenente in serie le due impedenze $\bar{Z}''$ e $\bar{Z}$. La nozione del circuito equivalente permette di seguire a colpo d'occhio l'andamento della cor-

rente primaria e degli altri elementi variabili del sistema, al variare del *carico*, cioè dell'impedenza esterna $\bar{Z}$.

Le medesime equazioni costituiscono il sistema fondamentale pel caso in oggetto. Per mezzo di esso, note le impedenze $\bar{Z}'$, $\bar{Z}''$, $\bar{Z}_\mu$ (costanti dell'apparecchio) e la d. d. p. costante d'alimentazione $\bar{D}$, si possono calcolare $\bar{I}'$, $\bar{I}''$, $\bar{I}_\mu$, $\bar{E}$ (e poi, se occorre, $\bar{\Phi}$ mediante la (1)) in funzione della impedenza esterna $\bar{Z}$, parametro fondamentale che caratterizza lo stato di funzionamento dell'apparecchio.

Eliminando $\bar{I}_\mu$ ed $\bar{E}$ si ottiene:

$$(6) \quad \begin{cases} \bar{D} = \bar{A} \bar{I}' - \bar{B} \bar{I}'' \\ 0 = \bar{B} \bar{I}' - (\bar{C} + \bar{Z}) \bar{I}'' \end{cases}$$

con $\bar{A} = \bar{Z}' + \bar{Z}_\mu$, $\bar{B} = \bar{Z}_\mu$, $\bar{C} = \bar{Z}_\mu + \bar{Z}''$; da cui:

$$(7) \quad \bar{I}' = \frac{\bar{D}(\bar{C} + \bar{Z})}{\bar{A}(\bar{C} + \bar{Z}) - \bar{B}^2}, \quad \bar{I}'' = \frac{\bar{D} \bar{B}}{\bar{A}(\bar{C} + \bar{Z}) - \bar{B}^2}.$$

Per $\bar{Z} = \infty$ (secondario aperto) si ha la corrente primaria a vuoto:

$$\bar{I}'_0 = \frac{\bar{D}}{\bar{A}}.$$

Per $\bar{Z} = 0$ (secondario in corto circuito) si ha la corrente primaria di corto circuito:

$$\bar{I}'_{cc} = \frac{\bar{D} \bar{C}}{\bar{A} \bar{C} - \bar{B}^2}.$$

E si verifica tosto che:

$$\bar{I}' - \bar{I}'_0 = \frac{\bar{B}}{\bar{A}} \bar{I}'', \quad \bar{I}' - \bar{I}'_{cc} = - \frac{\bar{B}}{\bar{A} \bar{C} - \bar{B}^2} \cdot \bar{Z} \bar{I}''.$$

Infine dalla (2) si trae:

$$\frac{\bar{D}}{\bar{Z}'} - \bar{I}' = \frac{\bar{E}}{\bar{Z}'}.$$

Assunto un vettore arbitrario a rappresentare la differenza di potenziale impressa $\bar{D}$, queste tre uguaglianze dimostrano che, se P è il punto (variabile) indice della corrente primaria corrispondente al carico generico definito dal valore $\bar{Z}$ della impe-

denza esterna, P_0 e P_1 sono gli analoghi punti (fissi) corrispondenti alla corrente primaria a vuoto e in corto circuito, e Q è il punto (fisso) indice del vettore $\frac{\bar{D}}{\bar{Z}}$, i vettori P_0P , P_1P , QP corrispondenti alle differenze $\bar{I}' - \bar{I}_0'$, $\bar{I}' - \bar{I}_{cc}'$, $\frac{\bar{D}}{\bar{Z}} - \bar{I}'$, rappresen-

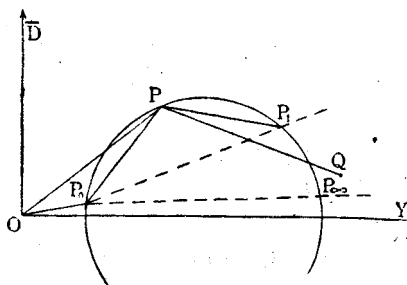


Fig. 2.

tano, in una scala conveniente e riferiti ad una conveniente direzione di riferimento (scala e direzione diversi per ciascuno di essi) rispettivamente la corrente secondaria $\bar{I}''$, la d. d. p. $\bar{Z} \bar{I}''$ ai morsetti secondari, la forza elettromotrice indotta $\bar{E}$. Quanto alle scale ed alle direzioni di riferimento esse

sono rispettivamente definite dai moduli e dagli argomenti dei tre numeri

$$\frac{\bar{B}}{\bar{A}}, \quad \frac{-\bar{B}}{\bar{A}\bar{C}-\bar{B}^2}, \quad \frac{1}{\bar{Z}}.$$

Dunque il sistema delle grandezze alternative che interessano il problema proposto dipende da una di esse, per la quale si suole scegliere la $\bar{I}'$. Essendo la espressione (7) di questa lineare rispetto a $\bar{Z}$, si deduce che se il carico varia in guisa che l'indice dell'impedenza esterna percorra una retta o un cerchio, e soltanto allora, il diagramma della corrente primaria è un cerchio. È dunque con questa restrizione che può parlarsi di diagramma circolare del trasformatore. Questo caso si presenta, ad es., quando il carico è rappresentato da una resistenza non induttiva ($\bar{Z}$ percorre una retta parallela all'asse reale), o quando resistenza e reattanza esterna variano proporzionalmente ($\bar{Z}$ percorre una retta, per l'origine). È da notarsi che in ognuno di essi, in virtù dell'osservazione al § 3 della parte I, il birapporto dei quattro punti corrispondenti a quattro valori dell'impedenza uguaglia il birapporto degli estremi dei corrispondenti vettori della corrente primaria.

8. A considerazioni del tutto analoghe dà luogo lo studio della macchina asincrona polifase.

Per semplicità supporremo che gli avvolgimenti statorico (primario) e rotorico (secondario) corrispondano ad un egual numero di fasi e che il numero dei conduttori sia lo stesso per due gruppi di avvolgimenti.

Finchè il rotore è fermo e chiuso su sè stesso o su una impedenza esterna si avrà anche qui a considerare un flusso principale che si concatena al medesimo modo con entrambi i gruppi di circuiti. Esso è dovuto al campo magnetico costante che ruota nella massa metallica dell'apparecchio con velocità angolare costante uguale alla pulsazione delle correnti immesse nello statore ⁽¹⁾. Il flusso di questo campo attraverso a ciascuno dei circuiti statorici e rotorici ha variazione alternativa perchè tale è la variazione del fattore di concatenamento ⁽²⁾ del campo rispetto ai circuiti, per modo che esso è rappresentabile al solito modo con un numero complesso Φ . E, partendo da questa grandezza, con ragionamento perfettamente identico a quello del paragrafo precedente, si arriva a stabilire per ogni fase dello statore e del rotore un sistema di equazioni come le (2), (3''), (4), (5), la conseguente nozione di sistema circuitale equivalente, ed infine una rappresentazione geometrica del tutto simile a quella studiata pel trasformatore.

Ma fra le spirali primarie e secondarie si esercitano delle forze ponderomotrici in conseguenza delle quali il rotore è sollecitato a girare, ed effettivamente esso ruoterà, se non vi si oppone una coppia resistente eccessiva, assumendo, a regime, una certa velocità ω' , diretta come la velocità ω di rotazione del campo. Risulterà $\omega' < \omega$ se si tratta del moto spontaneo della macchina, quale può essere determinato dalla coppia elettromagnetica di cui sopra; ma noi potremo supporre più generalmente che sul rotore agisca anche una coppia meccanica di diversa origine la quale potrà essere sia cospirante con quella, sia ad essa opposta, e corrispondentemente potrà ω' risultare comunque diversa da ω ed anche di segno contrario ⁽³⁾. In ogni caso indicheremo con

$$\sigma = \frac{\omega - \omega'}{\omega}$$

⁽¹⁾ Si suppone la macchina bipolare.

⁽²⁾ Vedi parte I, § 2.

⁽³⁾ Ciò corrisponde al funzionamento della macchina come motore, o come generatore, o come freno. Cfr. DONATI: *Diagramma generale per trasformatori a corrente alternativa e motori asincroni polifasi*. Atti dell'Accademia delle Scienze di Bologna, 1905.

lo *scorrimento* dei due moti, cioè il rapporto fra la velocità relativa del rotore rispetto al campo e la velocità del campo stesso.

Per effetto della rotazione del rotore, la frequenza delle correnti rotoriche e la grandezza delle forze elettromotrici di origine induttiva agenti nel circuito rotorico si modificano proporzionalmente allo scorrimento. Ma, per quanto riguarda la equazione (3), è da osservare che il contributo magnetomotore fornito dalla corrente secondaria non cessa di pulsare con la frequenza primitiva, perchè la modificata frequenza delle correnti secondarie è esattamente compensata dalla rotazione del secondario stesso; l'equazione (3) continua dunque a valere, purchè in essa per $\bar{I}''$ si intenda la caratteristica della corrente secondaria *ricondata alla frequenza fondamentale*, di una corrente cioè che si deduce dalla effettiva corrente secondaria mutandone nel rapporto $1:\sigma$ l'unità di misura delle ascisse nel diagramma sinusoidale senza mutare quella delle ordinate. La equazione (5) invece subisce, rispetto al precedente caso del rotore fermo, oltre la modificazione di frequenza, cui si può metter riparo interpretando la $\bar{I}''$ come sopra e analogamente facendo per la $\bar{E}$ (con chè questa grandezza diviene identica alla E della equazione (2)), anche un'altra modificazione per fatto della riduzione nel rapporto $1:\sigma$ delle grandezze delle forze elettromotrici di origine induttiva. Più precisamente, se si suppone nulla la impedenza esterna (o, ritenendola invariabile, la si suppone conglobata in $\bar{Z}''$), alla equazione (5) che qui scriveremo

$$\bar{E} = (R'' + jS'')\bar{I}''$$

per mettere in evidenza le componenti (resistenza R'' e reattanza jS'') di $\bar{Z}''$ si sostituisce la seguente:

$$\sigma\bar{E} = (R'' + j\sigma S'')\bar{I}''$$

la quale, divisa per σ , si identifica con la (5) stessa, quando in questa si ponga

$$\bar{Z} = R'' \left(\frac{1}{\sigma} - 1 \right).$$

Se ne conclude che la macchina asincrona si comporta, nei riguardi elettrici, come un trasformatore il cui secondario sia chiuso su una resistenza esterna, che alla sua volta varia con la velocità del rotore secondo la legge espressa dalla formula precedente.

L'intimo significato di ciò scaturisce chiaro se si fa il bilancio energetico dell'apparecchio: dopo aver osservato che in ogni caso la energia trasmessa dal primario al secondario corrisponde al lavoro elettrico compiuto dalla forza elettromotrice $\bar{E}$ nel secondario, si verifica facilmente che, mentre nel trasformatore di confronto a questo lavoro fa riscontro il calore svolto nell'apparecchio (per la parte utilizzata contro la impedenza $\bar{Z}'$) e la potenza elettrica disponibile ai morsetti secondari (per la parte corrispondente alla impedenza esterna $\bar{Z}$), nella macchina asincrona invece la analoga ripartizione adduce ancora al calore svolto nel secondario per la parte pertinente alla impedenza $\bar{Z}''$ — parte che si può dimostrare corrispondere alla frazione σ della totale potenza trasmessa —, ma per la rimanente frazione $1 - \sigma$ viene a mancare il corrispettivo in forma elettrica, perchè la impedenza $\bar{Z}$ è in questo caso puramente ideale. Sia valendosi del principio dell'energia, sia con considerazioni dirette, si può dimostrare che quest'ultima frazione corrisponde alla potenza meccanica resa (o assorbita, secondo il segno di $1 - \sigma$) dalla macchina.

Da queste considerazioni anzi si deduce che il prodotto $\bar{E} \times \bar{I}''$ può essere assunto come misura della coppia elettromagnetica K (motrice o frenante) della macchina. Infatti la potenza meccanica, che si è visto equivalere a $(1 - \sigma)\bar{E} \times \bar{I}''$ è anche rappresentabile con $K\omega'$, quindi:

$$K\omega' = (1 - \sigma)\bar{E} \times \bar{I}''$$

donde:

$$K\omega = \bar{E} \times \bar{I}'' \quad (1).$$

Ciò premesso, tutte le deduzioni analitiche e grafiche ottenute pel trasformatore si trasportano agevolmente alla macchina asincrona, per la quale è da notare che il trasformatore di confronto viene a lavorare con un carico (apparente) puramente *ohmico*, il cui valore $R''\left(\frac{1}{\sigma} - 1\right)$ è funzione di un sol parametro reale σ : la corrente primaria viene ad essere quindi espressa da una funzione lineare fratta di tale parametro, onde, al variare di σ , *l'indice della corrente primaria descrive un cerchio, che risulta*

(1) Il prodotto scalare $\bar{E} \times \bar{I}''$ coincide dunque con la potenza che competerebbe alla coppia K qualora il motore fosse animato da una velocità ω corrispondente al sincronismo, e perciò si suol dire che esso rappresenta la coppia *espressa in watt sincroni*.

referito omograficamente ai valori dello scorrimento. Il punto $P_0(\sigma=0)$ corrisponde al funzionamento *a vuoto* (marcia ideale sincrona), il punto $P_1(\sigma=1)$ al funzionamento in *corto circuito* (pel quale debbesi qui intendere il funzionamento a rotore fermo). Se sul cerchio si segna anche il punto P_∞ corrispondente a $\sigma=\infty$ (corrente secondaria in quadratura con la forza elettromotrice $\bar{E}$, quindi nulla la potenza trasmessa al secondario e, per quanto precede, nulla pure la coppia) è facile trovare il punto P corrispondente ad un dato valore di σ e viceversa. Basta all'uopo riflettere che

$$\sigma = (\sigma, 1, 0, \infty) = M(P, P_1, P_0, P_\infty)$$

dove M è un punto qualunque del cerchio. Più comodamente, tracciata una retta r parallela a MP_∞ ad intersecare in M_0, M_1 i raggi MP_0, MP_1 , e assunto su di essa un sistema di coordinate ascisse aventi l'origine in M_0 e per punto di ascissa uno il punto M_1 , σ sarà misurato dall'ascissa del punto d'incontro di r con MP .

9. Per la macchina sincrona, supposta costante la d. d. p. $\bar{D}$ ai capi, e che dovrà intendersi impressa o resa secondo che si riguarda la macchina come motore o come generatore, l'equazione fondamentale si stabilisce assai agevolmente, pensando che in ogni caso alla $\bar{D}$ fanno equilibrio tutte le forze elettromotrici che hanno origine negli avvolgimenti dell'indotto: fra queste ve n'è una, la cui caratteristica indicheremo con $\bar{E}$, che è indotta dalle alternazioni del flusso dovuto al campo induttore, mentre tutte le altre (cadute di tensione ohmica e induttiva, reazione d'indotto ecc.) sono proporzionali alla corrente $\bar{I}$, quindi rappresentabili cumulativamente con un'espressione del tipo $\bar{Z}\bar{I}$. La costante $\bar{Z}$ così definita è quella che si chiama la impedenza sincrona della macchina. L'equazione cercata è dunque semplicemente:

$$D = \bar{E} + \bar{Z}\bar{I}$$

valevole, con opportune convenzioni sui segni, in ogni caso. Il diagramma che ad essa corrisponde è un triangolo ODP ($\vec{OD} = \bar{D}$, $\vec{OP} = \bar{E}$, $\vec{PD} = \bar{Z}\bar{I}$) di cui i primi due vertici O, D sono fissi mentre il terzo P caratterizza lo stato di funzionamento della macchina (fig. 3). Il vettore PD rappresenta così proporzionalmente la corrente, ma, per la valutazione della fase, è da notarsi che, a causa del fattore $\bar{Z}$, la direzione di riferimento è spostata

in anticipo di un angolo φ uguale all'argomento di $\bar{Z}$. Ne segue che, fatto $\widehat{ODM} = \varphi$, lo spostamento di fase fra $\bar{D}$ e $\bar{I}$ corrisponde all'angolo $\widehat{MDP}$.

10. Se ai diagrammi or ora studiati noi andiamo ad applicare il metodo generale esposto al § 5 (parte I), perverremo facilmente alla rappresentazione grafica delle potenze elettriche che interessano le macchine considerate.

Premettiamo che se si vuole, in generale, conoscere la potenza elettrica somministrata ad un circuito alimentato da una d. d. p. costante $\bar{D}$ e dotato di impedenza comunque variabile $\bar{Z}$, seguendo le indicazioni del § 5, si osserverà in primo luogo che tale potenza è espressa, riferendoci ai valori efficaci, da $\bar{D} \times \bar{I}$. Il punto variabile P è in questo caso l'indice della corrente $\bar{I}$, ed esso può occupare una posizione qualunque del piano, mentre il vettore $\bar{D}$ è fisso. La curva fondamentale della potenza W sarà il luogo dei punti P pei quali risulta $\bar{D} \times \bar{I} = 0$ cioè $\bar{D}$ perpendicolare a $\bar{I}$. Essa è dunque la retta condotta per l'origine perpendicolarmente a $\bar{D}$. Ne segue senz'altro che la distanza di P da questa retta misura la potenza W .

Similmente per un circuito come il precedente, in cui invece sia costante la impedenza $\bar{Z}$ e quindi sono variabili tanto $\bar{D}$ quanto $\bar{I}$, si ha $\bar{D} = \bar{Z}\bar{I}$ quindi

$$W = \bar{D} \times \bar{I} = \bar{Z}\bar{I} \times \bar{I} = R\bar{I}^2$$

essendo R la parte reale di $\bar{Z}$. Dunque la curva fondamentale della potenza elettrica si riduce all'origine O , che manifestamente sta qui a rappresentare un cerchio di raggio nullo ⁽¹⁾.

Ciò premesso, è assai facile riconoscere che le linee fondamentali delle potenze elettriche in giuoco in ciascuna delle macchine considerate sono rette o cerchi.

Pel trasformatore e per la macchina asincrona infatti si ha che:

per le *potenze impresse*, siamo nel primo dei casi dianzi esaminati, perchè $\bar{D}$ è costante, e si ottiene così in ogni caso la retta OY condotta per l'origine perpendicolarmente a $\bar{D}$;

per le *potenze perdute* nel primario, oppure nel secondario, oppure nel circuito d'eccitazione, si ottengono come linee fon-

(1) Infatti la potenza di P rispetto ad un tale cerchio-punto corrisponde al quadrato di OP e quindi misura W .

damentali i cerchi-punto rappresentati dalle origini dei vettori che rappresentano $\bar{I}'$, $\bar{I}''$, $\bar{E}$. La cosa è evidente pei primi due, quanto al terzo basta osservare che la perdita d'eccitazione vale $Z_{\mu}\bar{I}_{\mu} \times \bar{I}_{\mu} = \bar{E} \times \frac{\bar{E}}{Z_{\mu}}$, quindi è proporzionale ad E^2 ;

quanto alla *potenza trasmessa* al secondario $\bar{E} \times \bar{I}''$, essendo essa uguale alla potenza impressa diminuita delle potenze perdute nel primario e nel circuito d'eccitazione, l'equazione della sua curva fondamentale sarà una combinazione lineare di quelle delle curve fondamentali di queste tre potenze, e quindi un cerchio. E per ragione analoga, risulterà pure un cerchio la linea fondamentale della *potenza resa*. Ma ciò può dimostrarsi direttamente in modo assai semplice riflettendo che il prodotto $\bar{E} \times \bar{I}''$ si annulla quando i vettori corrispondenti ad $\bar{E}$ ed $\bar{I}''$ risultano perpendicolari, cioè quando l'angolo compreso fra i segmenti P_0P e QP differisce da un retto per quanto corrisponde all'angolo compreso fra le direzioni rispetto alle quali risultano riferiti i segmenti stessi, secondo quanto si è detto a pag. 14. Quel prodotto scalare dunque si annulla per un valore costante dell'angolo P_0PQ , quindi la curva cercata è un cerchio per P_0 e Q . Analogamente la curva della potenza resa $\bar{Z}\bar{I} \times \bar{I}''$ è un cerchio per P_0 e P_1 .

Nel caso della macchina asinerona poi, siccome P varia lungo il diagramma circolare della macchina, le linee delle perdite e delle potenze si riducono ad altrettante rette, e precisamente le potenze rese, impresse, trasmesse, sono misurate dalla distanza di P dalle rette P_0P_1 , OY , P_0P_{∞} ⁽¹⁾, e le perdite nel primario, nel circuito d'eccitazione e nel secondario sono misurate dalle

(1) La prima di tali rette passa certamente per P_0 e P_1 perchè in questi punti è nulla la potenza resa; analogamente dicasi per la terza, perchè in P_0 e P_{∞} è nulla la potenza trasmessa. E si noti che, per quanto si è detto a pag. 17, la distanza di P dalla P_0P_{∞} misura la *coppia*. Essa è cospirante col movimento nel tratto superiore del diagramma, contraria nel tratto inferiore. Quest'ultimo corrisponde al funzionamento della macchina come *generatrice*, mentre il primo tratto corrisponde al funzionamento come *motore*. È per altro da osservare che nel tratto P_1P_{∞} la macchina assorbe energia elettrica (il punto P è superiore alla retta OY) ed anche energia meccanica (il punto P sta al disotto della retta P_0P_1) e tutta l'energia così assorbita viene ceduta al secondario ove vien convertita in calore: la macchina funziona da *freno* (la coppia elettromagnetica risultando contraria alla coppia meccanica applicata, eserci rispetto a questa una azione frenante).

distanze di P dalle semipolari rispetto allo stesso cerchio dei punti O, Q, P_0 , l'ultima delle quali si riduce alla tangente in P_0 . E si può anche costruire una retta la cui distanza da P misura le *perdite totali*.

Per la macchina sincrona che funziona da motore (o generatore), volendosi valutare la potenza $\bar{E} \times \bar{I}$ resa (o impressa) e la potenza $\bar{D} \times \bar{I}$ impressa (o resa), non avremo da fare altro che determinare il luogo del punto P perchè risulti $\bar{E} \times \bar{I} = 0$ oppure $\bar{D} \times \bar{I} = 0$. Indicando ancora con φ l'argomento di $\bar{Z}$, dovrà all'uopo risultare $\widehat{ODP} = \frac{\pi}{2} + \varphi$ o $\widehat{DPO} = \frac{\pi}{2} - \varphi$ rispettivamente.

Ne segue che il primo luogo è il cerchio C_0 costruito su OD e ca-

pace a destra dell'angolo $\frac{\pi}{2} - \varphi$,

ed il secondo luogo è la tangente t condotta a questo cerchio in D . La linea delle perdite si riduce, al solito, al punto D . Si conclude così che per uno stato di funzionamento definito dal punto P , la potenza resa, le perdite totali, la potenza impressa, sono misurate — in scale diverse — dalla potenza di P rispetto al predetto cerchio, dal quadrato della distanza di P da D , dalla distanza di P dalla tangente t rispettivamente ⁽¹⁾.

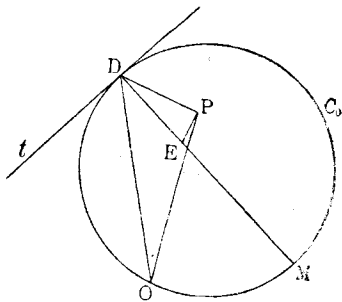


Fig. 3.

11. Costruite le linee fondamentali P_r, P_i, P_p delle potenze rese, delle potenze impresse e delle perdite, che in ogni caso (I, § 6) appartengono ad un fascio, è ovvia la determinazione del rendimento per ogni stato di funzionamento definito da una posizione particolare del punto P . La linea del fascio passante per P sarà, nel caso del trasformatore, un cerchio P_η passante per i punti comuni alla retta OY ed al cerchio P_r , nel caso della macchina asincrona, una retta, e nel caso della macchina sincrona un cerchio P_η tangente in D a t . E in ogni caso sarà

$$\eta = (P_\eta, P_p, P_r, P_i);$$

il rendimento corrisponderà dunque al birapporto di quattro rette

⁽¹⁾ Cfr. DONATI: *Diagramma per motori sincroni e alternatori*. Rendiconti dell'Accademia delle Scienze di Bologna, 1913.

di un fascio ⁽¹⁾ per la macchina asincrona, mentre pel trasformatore e per la macchina sincrona esso risulta rappresentato dal birapporto di quattro cerchi d'un fascio, e quindi (I, § 6, nota) da quello dei quattro centri. Siccome poi il cerchio P_i si riduce in ogni caso ad una retta, questi ultimi birapporti si riducono al rapporto semplice dei tre centri C_η, C_1, C_0 dei cerchi P_η, P_p, P_r , cioè il rendimento è misurato dall'ascissa del punto C_η della retta C_0C_1 , sulla quale C_0 sia assunto per origine e C_1 per punto unitario. In particolare, per la macchina sincrona, si può assumere il punto M per origine e D per punto unitario, con che, detto E l'estremo del diametro DE di C_η , il rendimento coincide con l'ascissa di E .

Bologna, dicembre 1925.

⁽¹⁾ E quindi riducibile senz'altro ad una ascissa.