Bollettino Unione Matematica Italiana

Luigi Onofri

Sulla teoria delle sostituzioni che operano su infiniti elementi

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **5** (1926), n.1, p. 6–11.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1926_1_5_1_6_0>

Sulla teoria delle sostituzioni che operano su infiniti elementi.

Nota di LUIGI ONOFRI

1. La teoria delle sostituzioni su infiniti elementi è stata trattata una prima volta dieci anni or sono dal prof. GIULIO ANDREOLI che, in una Memoria pubblicata dal Circolo Matematico di Palermo (anno 1915), tracciò uno schema di una teoria generale e ne fece conoscere molti interessanti risultati.

L'opera così felicemente iniziata non ha trovato però, a quanto a me consta, alcun continuatore: ciò forse per la natura della teoria, per sè stessa astrusa e non suscettibile, almeno in un primo tempo, di facili e suggestive applicazioni, e forse anche per la impostazione troppo generale ed estensiva data ad essa dall'ANDREOLI, per la novità dei vocaboli, per il frasario non prima usato, e per il rapido trapasso a conclusioni inaspettate, le quali avrebbero richiesto un più vasto svolgimento.

Tale svolgimento forma appunto oggetto della Memoria di cui ora dò notizia. Anzitutto debbo avvertire che trovai opportuno di modificare alquanto le ipotesi presupposte dall'ANDREOLI e di imporre alcune limitazioni atte a rendere più stretto il legame di questa teoria con quella che considera solo sostituzioni sopra un numero finito di elementi. In primo luogo ho supposto che gli insiemi I di elementi su cui operano singolarmente le sostituzioni da me studiate siano numerabili, escludendo dalla teoria generale le sostituzioni che scambiano fra loro ad un tempo tutti gli elementi di insiemi non numerabili. In secondo luogo mi è sembrato conveniente il dare una definizione di sostituzione che permettesse di affermare in ogni caso l'esistenza della inversa s^{-1} di una qualsiasi operazione s.

Queste limitazioni, suggeritemi anche dal prof. ETTORE BORTOLOTTI, mi hanno dimostrato più tardi, nel corso dello studio, tutta la loro efficacia ed utilità permettendomi di affermare e di estendere le proposizioni esposte dall'ANDREOLI, di portare a fondo lo studio di certe questioni che nel caso generale avrebbero potuto appena essere sfiorate, ed infine di stabilire risultati nuovi, che credo notevoli, dei quali darò breve cenno.

2. L'insieme delle sostituzioni che operano sugli elementi di un aggregato numerabile ha *la potenza del continuo*. Il prodotto di una infinità numerabile di tali sostituzioni, date in ordine determinato, vien detto ***prodotto infinito***, e si definisce considerando il procedimento mediante il quale dalla successione:

$$(a) \qquad s_1, \quad s_2, \quad s_3, \ldots, \quad s_n, \ldots$$

si passa alla successione:

$$(b) \qquad s_1, \quad s_1 \cdot s_2, \quad s_1 \cdot s_2 \cdot s_3, \ldots, \quad s_1 \cdot s_2 \cdot s_3 \ldots s_n, \ldots$$

Affinchè questo procedimento conduca ad un risultato concreto (cioè affinchè il prodotto infinito sia *convergente*) occorre che la successione (b) *tenda* verso una sostituzione limite ben determinata. Si presenta dunque sin da principio la necessità di uno studio sistematico del concetto di *limite di una data successione di sostituzioni*; ciò feci appunto dando anzitutto la definizione di limite, cercando le condizioni per la sua esistenza, e deducendone quelle proposizioni che dovevano servire di necessarie basi ad ogni ulteriore svolgimento.

3. Ho potuto così facilmente e nel modo più rigoroso estendere alcuni concetti e teoremi noti per i gruppi finiti. In particolare ho dimostrato il teorema:

Qualunque sostituzione può considerarsi come il prodotto finito od infinito di sostituzioni cicliche su elementi diversi, ed ho precisata la estensione del concetto di *periodo* di una sostituzione. È noto che una operazione θ dicesi a *periodo finito* quando esiste una sua potenza θ^m eguale alla operazione identica.

Fra le sostituzioni su infiniti elementi ve ne sono alcune aventi periodo finito (ad esempio la sostituzione $\theta = (1, 2) \cdot (3, 4) \ldots \ldots (n, n+1) \ldots$, ha periodo 2) ed altre invece per le quali non esiste alcuna potenza θ^m uguale all'unità.

Volendo dare una definizione di periodo per le sostituzioni di questa seconda categoria si è naturalmente condotti a studiare il comportamento dei prodotti infiniti formati con le potenze di θ:

$$(\alpha) \qquad \theta^{r_1} \cdot \theta^{r_2} \ldots \theta^{r_n} \ldots$$

con $r_1, r_2, \ldots, r_n, \ldots$ interi. Se esiste almeno uno di questi prodotti infiniti avente per valore l'identità, l'operazione θ viene chiamata a *periodo infinito*, ed in virtù della equazione $\theta^{r_1} \cdot \theta^{r_2} \ldots \theta^{r_n} \ldots = 1$ si può esprimere qualsiasi potenza positiva o negativa di θ mediante un prodotto finito od infinito di potenze positive. Nel caso contrario è facile dimostrare che tutti i prodotti del tipo di (α) sono non convergenti e le operazioni θ, θ^{-1} vanno considerate come tra loro indipendenti. Una tale operazione θ si dirà *senza periodo*.

Ad esempio la sostituzione:

$$s_1 = (1, 2) \cdot (3, 4, 5) \cdot (6, 7, 8, 9)(\ldots)\ldots$$

è a *periodo infinito* perchè il prodotto:

$$s_1^{2} \cdot s_1^{4} \cdot s_1^{18} \cdot \ldots \cdot s_1^{r! - (r-1)!} \cdot \ldots$$

ha per valore 1.

Invece la sostituzione:

$$s_2 = (\ldots, -n, -n+1, \ldots, -1, 0, 1, \ldots, n, n+1, \ldots)$$

è *senza periodo*.

4. Ho considerato complessi ed insiemi di sostituzioni soddisfacenti alla condizione posta a definizione dei gruppi finiti e cioè contenenti il prodotto di due loro operazioni qualsiasi, ed ho distinto tali complessi in *gruppi, pseudogruppi composti, pseudogruppi semplici.*

Ho riservato il nome di *gruppi* ai complessi che contengono l'inversa di ogni loro operazione, ho detto *pseudogruppi composti* quei complessi che contengono l'inversa di alcune ma non di tutte le loro operazioni, e *pseudogruppi semplici* quelli che non contengono l'inversa di nessuna loro operazione.

Ai gruppi ed agli pseudogruppi si possono estendere le ordinarie definizioni di *sottogruppo*, di *sottopseudogruppo*, di *ordine* (potenza al senso di CANTOR del complesso), e su di essi si può eseguire una importante operazione propria dei complessi infiniti: l'*operazione di chiusura*. Un gruppo o pseudogruppo C contiene per definizione tutti i prodotti finiti formati con le sue operazioni, ma non è detto che contenga anche tutti i loro prodotti infiniti (cioè non è detto che sia *chiuso*); l'operazione di chiusura consiste nell'aggiungere a C un insieme K in modo che $C+K$ sia *chiuso* e sia il *minimo* fra i complessi chiusi contenenti C.

Di questa operazione, di cui trovasi già un accenno nell'ANDREOLI, ho dimostrato in ogni caso la possibilità, l'unicità del risultato, e ho dato un procedimento generale per effettuarla.

5. Un altro concetto relativo ai gruppi finiti e che ho esteso ai gruppi e pseudogruppi è quello di *indice* di un complesso C in un complesso G che lo contiene.

Come è ben noto, chiamasi indice di un gruppo finito C in un gruppo G il numero degli insiemi del tipo gC o Cg senza operazioni comuni nei quali si può decomporre G; volendo trasportare questa definizione ai complessi di infinite operazioni, ci si imbatte in una grave difficoltà rappresentata dalla impossibilità in certi casi di decomporre G rispetto a C. Quando ciò avviene ho chiamato C *senza indice* in G, quando invece la decomposizione è possibile (e per essa ho dato condizioni necessarie e sufficienti) ho chiamato *indice a destra* la potenza dell'insieme dei complessi Cg di una decomposizione a destra, e *indice a sinistra* l'analoga potenza di una decomposizione a sinistra.

È da notare che i due indici a destra e a sinistra possono essere distinti.

6. Lo studio della *trasformazione dei complessi* (alla quale si collegano la determinazione dei complessi invarianti massimi e quindi la costruzione delle serie di composizione) è stato da me trattato per complessi qualsiasi anche non gruppi o pseudogruppi

e quindi con una generalità maggiore di quella ordinariamente usata.

Insieme al noto concetto di *invarianza* (considerato anche dall'ANDREOLI) ho introdotto quelli nuovi di *riducibilità* e di *ampliabilità*, intendendo per *riducibile* (*ampliabile*) un complesso C che può essere trasformato da una operazione t in una sua parte propria C' (in un complesso C'' che lo contiene).

7. Come già ho detto questo studio è legato alla determinazione delle *serie di composizione.* Per esse ho assunto definizione analoga a quella che si dà per i gruppi finiti non sembrandomi nè necessario nè opportuno l'adottare quella proposta dall'ANDREOLI. È da osservare peraltro che, a differenza di quanto avviene per i gruppi finiti, non è sempre possibile, nè con l'ordinaria definizione, nè con quella proposta dall'ANDREOLI, costruire una serie di composizione per un complesso di infinite sostituzioni. Tale impossibilità dipende da varie cause, fra le quali quella che non tutti i gruppi o pseudogruppi ammettono complessi invarianti massimi.

Parecchi teoremi relativi alle *serie ordinarie* e *principali* e relativi ai *gruppi risolubili* operanti su un numero finito di elementi si possono estendere facilmente ai complessi infiniti, fra essi vogliamo ricordare quello di JORDAN-HÖLDER *che assicura l'invarianza dei fattori di composizione e l'isomorfismo dei gruppi fattoriali in due diverse serie di composizione.*

Questo teorema vero, anche nel caso da me studiato, per quei complessi che hanno serie formate da un numero finito di termini, può cadere in difetto per i complessi che possiedono serie infinite di composizione.

Ad esempio il gruppo totale G ha una unica serie di composizione così fatta:

$$G, \quad G_1, \quad G_2, \quad 1$$

dove G_1 è il gruppo di tutte le sostituzioni di G che operano su un numero finito di elementi, e G_2 è il sottogruppo di G_1 formato con le sostituzioni di classe pari.

8. Il concetto di *isomorfismo*, che è uno dei più notevoli nella teoria dei gruppi finiti, si può immediatamente estendere alle operazioni da me considerate senza bisogno di introdurre restrizioni essenziali; però la teoria che ne deriva è naturalmente più

ampia e complicata, e specie nell'isomorfismo meriedrico presenta casi particolari assai interessanti. Esistono, ad esempio, degli isomorfismi fra due pseudogruppi G e C tali che il numero delle operazioni di C che corrispondono ad ogni operazione g di G varia al variare di g in G.

9. Nell'ultima parte di questo studio sono trattate la *transitività* e *l'intransitività* dei gruppi e degli pseudogruppi.

Per i complessi infiniti possono aver luogo, oltre alla ordinaria *transitività*, le seguenti specie d'*intransitività*:

semitransitività superiore quando esiste un elemento a al posto del quale può portarsi un elemento arbitrario x, ma a non può essere portato al posto di un elemento arbitrario;

semitransitività inferiore quando è semitransitivo superiormente il complesso C^{-1} formato con le inverse delle sostituzioni del complesso dato C;

intransitività di 1^a^ specie quando si possono dividere gli elementi in sistemi di transitività;

intransitività di 2^a^ specie quando nessuna delle suddette condizioni è verificata.

Sulla transitività ed intransitività di 1^a^ specie ho potuto stabilire i principali teoremi noti per i gruppi finiti, ed ho anche dimostrato che *il gruppo totale è l'unico gruppo avente transitività di grado infinito.* Questo teorema si presenta come l'estensione del teorema sui gruppi finiti: *Un gruppo di sostituzioni su* n *lettere che non coincide con l'alterno o col totale non può avere transitività di grado* $>$ *di* $e\left(\frac{n}{2}\right)$ $\left[\text{dove } e\left(\frac{n}{2}\right) \text{ è il massimo intero contenuto in } \frac{n}{2}\right]$.

La semitransitività e l'intransitività di 2^a^ specie si presentano soltanto negli pseudogruppi, e relativamente ad esse ho stabilito varie proposizioni che tendono specialmente a porre in luce il modo del tutto speciale con cui le sostituzioni operano sui loro elementi.

10. Infine voglio notare come mi sia stato possibile estendere il concetto di *imprimitività* non solo ai complessi transitivi (come avviene per i gruppi finiti) ma anche agli pseudogruppi semitransitivi ed intransitivi di 2^a^ specie.

I teoremi noti in proposito per i gruppi finiti conservano nel caso attuale la loro piena validità.