Umberto Crudeli

I moti lenti (regolari) vorticosi dei gas

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **5** (1926), n.1, p. 3–6.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1926_1_5_1_3_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 1926.

I moti lenti (regolari) vorticosi dei gas.

Nota di UMBERTO CRUDELI

Supporremo l'assenza di forze di massa (ovvia risulterà la modifica per il caso contrario, non essenziale in questa trattazione) e supporremo, inoltre, l'assenza di viscosità. Ciò premesso, si ha intanto la seguente equazione (vettoriale):

$$\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = -\operatorname{grad}\varphi,$$

dove $\boldsymbol{v}$ rappresenta la velocità e t il tempo, mentre

$$\varphi = \int \frac{dp}{\rho},$$

essendo ρ la densità e p la pressione. Alla $\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}$ potremo, trattandosi di moto lento, sostituire la $\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t}$ ed alla φ il prodotto $-c^2\theta$, dove θ denota il coefficiente di dilatazione del gas e c^2 una certa costante positiva [1]; sicchè

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} = c^2 \operatorname{grad}\theta. \tag{1}$$

Nei riguardi poi della equazione di continuità

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \boldsymbol{v}) = 0,$$

essa riducesi, per noi, alla seguente:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \operatorname{div} \boldsymbol{v}. \tag{2}$$

[1] Mediante ricorso alla formula di BOYLE e MARIOTTE, (la temperatura venendo supposta costante) si ottiene $dp = c^2 d\rho$; d'altra parte, designando con ρ_0 e dS_0 rispettivamente la densità ed il volume iniziali della particella, si ha, per il principio della conservazione della massa, $\rho_0 dS_0 = \rho dS$, e quindi $\rho = \frac{\rho_0}{1+\theta}$, essendo $\theta = \frac{dS - dS_0}{dS_0}$. Con ciò, pertanto:

$$\int \frac{dp}{\rho} = -c^2 \int \frac{d\theta}{1+\theta},$$

di cui viene ritenuto soltanto il termine $-c^2\theta$.

Mediante derivazione della (1) rispetto al tempo, e tenendo presente la (2), viene

$$\frac{\partial^2 \boldsymbol{v}}{\partial t^2} = c^2 \operatorname{grad} \operatorname{div} \boldsymbol{v},$$

ovvero

$$\frac{\partial^2 \boldsymbol{v}}{\partial t^2} = c^2(\Delta'_2 \boldsymbol{v} + \operatorname{rot} \operatorname{rot} \boldsymbol{v}). \tag{3}$$

Invece, prendendo la div della (1), e tenendo presente la (2), si ha

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} = c^2 \Delta_2 \theta,$$

come si avrebbe nel caso di assenza di vortici [1].

* * *

La (3), non omettendo di osservare che nella presente trattazione [come si deduce subito dalla (1)] i vortici risultano stazionari, conduce al seguente *teorema di unicità*:

Nel moto lento (regolare) di un gas le velocità internamente ad uno spazio S, il quale viene supposto fisso, risultano individuate in modo unico, qualora in un certo istante (che diremo iniziale) siano ivi noti i loro valori e quelli delle loro derivate parziali rispetto al tempo, mentre sul contorno di S siano noti in ogni istante i valori di esse velocità oppure quelli delle loro derivate normali.

Invero, se, in corrispondenza ad eguali condizioni del tipo indicato, esistessero della (3), entro S, due soluzioni (regolari), coteste due soluzioni avrebbero fra loro eguali, nell'interno di S, anche le rotazioni, essendo queste per noi stazionarie; quindi la differenza (diciamola ε) fra due componenti omonime delle predette due soluzioni sarebbe della equazione

$$\frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial t^2} = c^2 \Delta_2 \varepsilon \tag{4}$$

soluzione (regolare) entro lo spazio S, la quale, in ogni istante avrebbe ovunque valore nullo sul contorno di S oppure della quale sarebbe in ogni istante nulla, sullo stesso contorno, la derivata normale, mentre nell'istante iniziale sarebbero nulle essa ε e la sua derivata parziale rispetto al tempo.

[1] Giova notare che si usa scrivere i simboli Δ'_2 e Δ_2 anche senza l'indice.

Per dimostrare che la ε risulta in ogni istante nulla in S, si potrebbe sfruttare il procedimento usato dal **Poincaré** nella sua opera *Théorie mathématique de la lumière* (tome II, 1892, pag. 134): quello usato dal **Boussinesq** nel Cours d'Analyse infinitésimale (*Calcul intégral*, 1890, fascicule II, pagg. 381-384) non essendo rigoroso.

Si può procedere anche così: moltiplicando la (4) per $\frac{\partial\varepsilon}{\partial t}$ ed integrando poi allo spazio S, viene

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_{(S)}\left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial t}\right)^2 dS = c^2\int_{(S)}\frac{\partial\varepsilon}{\partial t}\,\Delta_2\varepsilon\, dS.$$

Ma, avendosi

$$\int_{(S)}\left\{\frac{\partial\varepsilon}{\partial t}\,\Delta_2\varepsilon + \varepsilon\Delta_2\left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial t}\right)\right\}dS = \frac{d}{dt}\int_{(S)}\varepsilon\Delta_2\varepsilon\, dS,$$

ed essendo ora

$$\int_{(S)}\left\{\frac{\partial\varepsilon}{\partial t}\,\Delta_2\varepsilon - \varepsilon\Delta_2\left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial t}\right)\right\}dS = 0,$$

si ottiene

$$\int_{(S)}\frac{\partial\varepsilon}{\partial t}\,\Delta_2\varepsilon\, dS = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_{(S)}\varepsilon\Delta_2\varepsilon\, dS;$$

quindi

$$\frac{d}{dt}\int_{(S)}\left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial t}\right)^2 dS = c^2\frac{d}{dt}\int_{(S)}\varepsilon\Delta_2\varepsilon\, dS;$$

poi, non dimenticando il significato di ε, segue

$$\frac{d}{dt}\int_{(S)}\left\{\left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial t}\right)^2 + (c \operatorname{grad}\varepsilon)^2\right\}dS = 0,$$

in cui $(c \operatorname{grad}\varepsilon)^2$ designa il prodotto scalare $(c \operatorname{grad}\varepsilon) \times (c \operatorname{grad}\varepsilon)$.

Infine, integrando fra l'istante iniziale e l'istante t, e tenendo presente che nel primo di cotesti istanti si ha $\varepsilon = \frac{\partial\varepsilon}{\partial t} = 0$ in S, si vede come in ogni istante risulta ovunque $\varepsilon = 0$ in S.

***

Si ponga

$$\boldsymbol{v}(M, t) = \boldsymbol{u}(M, t) + \frac{1}{4\pi}\int_{(S)}\frac{\operatorname{rot}\operatorname{rot}\boldsymbol{v}}{r}\,dS, \tag{5}$$

dove r designa la distanza fra il punto relativo all'elemento dS ed il punto M in cui, nel generico istante t, viene presa la funzione vettoriale a primo membro [1] della (5).

Non omettendo di ricordare che per noi i vortici sono stazionari, avremo, entro S, la equazione

$$\frac{\partial^2 \boldsymbol{u}}{\partial t^2} = c^2 \Delta'_2 \boldsymbol{u}.$$

Inoltre, tenendo presente che in S il moto viene supposto regolare, potremo, nello spazio in discorso, scrivere

$$\boldsymbol{v}(M, t) = \boldsymbol{u}(M, t) + \frac{1}{2\pi} \int_{(S)} \boldsymbol{w} \wedge \operatorname{grad}\left(\frac{1}{r}\right) dS + \frac{1}{2\pi} \int_{(\sigma)} \frac{\boldsymbol{w} \wedge \boldsymbol{n}}{r} d\sigma,$$

dove con $\boldsymbol{w} = \frac{1}{2} \operatorname{rot} \boldsymbol{v}$ viene rappresentato il vortice, con σ il complessivo contorno dello spazio S, con $\boldsymbol{n}$ il vettore unitario orientato come la normale al contorno in discorso (volta verso l'interno di S) e dove la r che figura nel secondo integrale denota naturalmente la distanza fra il punto relativo all'elemento $d\sigma$ ed il punto M.

Messina, dicembre 1925.

[1] Naturalmente la $\operatorname{rot} \operatorname{rot} \boldsymbol{v}$ che figura nella (5) sotto il segno d'integrale va riguardata come funzione del punto relativo all'elemento dS.