
BOLLETTINO UNIONE MATEMATICA ITALIANA

GUIDO FUBINI

Geometria proiettivo-differenziale

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1,
Vol. 5 (1926), n.1, p. 28-37.

Unione Matematica Italiana

<[http:
//www.bdim.eu/item?id=BUMI_1926_1_5_1_28_0](http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1926_1_5_1_28_0)>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

RELAZIONI SCIENTIFICHE

Geometria proiettivo-differenziale.

Negli ultimi anni, accanto alla geometria differenziale metrica, hanno assunto organismo e dignità di dottrina altre geometrie differenziali, specialmente la *affine* e la *proiettiva*. Queste geometrie, tutte volte allo studio delle proprietà differenziali degli enti geometrici, si propongono di approfondire quelle soltanto che sono invarianti o per il gruppo *affine* o per il gruppo *proiettivo*.

Dei risultati conseguiti per il gruppo proiettivo voglio qui render conto in questo rapido sommario.

Il verso di una retta (senso, orientazione) è un concetto fondamentale della geometria metrica, che si può estendere alla geometria proiettiva nel modo seguente. Accoppiamo insieme uno dei versi in cui un punto può descrivere una retta r con uno dei versi secondo cui un piano può rotare attorno ad r ; tale accoppiamento si potrà definire come *orientazione proiettiva* di una retta, purchè si convenga di considerare non distinte una orientazione e quella che si otterrebbe scambiando contemporaneamente i due versi sopra citati. Così una retta avrà due sole orientazioni; e le proiettività reali si diranno di prima o di seconda specie secondo che non invertono oppure invertono l'orientazione delle rette, analogamente a quanto avviene per i movimenti e per i prodotti di un movimento per una simmetria nella geometria metrica.

Di questa definizione ci si può servire per definire il verso di un fascio di raggi, ecc.

Lo studio delle varietà geometriche si può compiere con due metodi distinti; l'uno ricorre ad equazioni differenziali lineari, cui debbono soddisfare le coordinate di un ente variabile nella varietà considerata (p. es. del punto generico descrivente una data superficie od ipersuperficie, oppure della retta mobile in un

dato complesso, o in una data congruenza ecc.); l'altro (ricorre all'estensione delle ricerche di GAUSS e si propone di definire una varietà geometrica mediante forme differenziali. Il primo di questi metodi, il cui sviluppo è dovuto specialmente al WILCZYNSKI, ha portato a molti risultati di fondamentale importanza, ma presenta il difetto di ricorrere talvolta a quantità sprovviste di significato geometrico, e di condurre in qualche caso a calcoli estremamente lunghi, anche già nella stessa teoria delle superficie, quando le coordinate curvilinee siano scelte in modo generico. L'altro metodo più recente è stato applicato anche al caso delle ipersuperficie, per il quale finora non è stato tentato il metodo delle equazioni differenziali.

Per la teoria delle curve sghembe i due metodi sono all'incirca equivalenti: e si trovano un parametro che in queste ricerche è l'analogo dell'arco della geometria metrica e due invarianti, che sarebbero in un certo senso l'analogo della curvatura e della torsione metrica. L'annullarsi di uno caratterizza le curve di un complesso lineare, l'annullarsi di entrambi caratterizza le cubiche sghembe.

Già nella teoria delle curve appare chiara la convenienza di scomporre i problemi studiati in due: il primo è quello di studiare gli invarianti nel campo delle collineazioni unimodulari (rappresentate cioè in coordinate omogenee x da trasformazioni lineari omogenee a determinante 1); il secondo si propone il problema di studiare ciò che avviene quando le x sono moltiplicate per uno stesso fattore (che può anche non essere costante, ma funzione delle stesse x). Questo secondo problema è in generale studiato col metodo della *normazione*: vale a dire si determina in modo *invariante* (per collineazioni) e *intrinseco* (cioè indipendente dalla scelta delle coordinate curvilinee) il fattore di proporzionalità delle x : in altre parole si *normano* le coordinate omogenee x dell'ente che descrive la varietà studiata con metodo intrinseco e invariante definito da questa stessa varietà.

Un'altra idea direttrice in queste ricerche è la generalizzazione a gruppi qualsiasi, e in particolare al gruppo proiettivo, del concetto di varietà applicabili, e di deformazione di una varietà: concetti ben noti della geometria differenziale metrica.

Queste due idee hanno guidato negli ultimi tempi tutti gli studiosi della geometria differenziale sia nel gruppo proiettivo, sia in altri gruppi (conforme, di LAGUERRE).

Nella teoria delle superficie S si presentano spontaneamente due forme differenziali, l'una quadratica F_2 , l'altra cubica F_3 invarianti per collineazioni unimodulari e di carattere intrin-

seco; il loro quoziente $F_3:F_2$ è invece senz'altro invariante per collineazioni qualunque. La prima, uguagliata a zero, definisce le asintotiche (che nel caso generale che si studia si sogliono supporre distinte), l'altra definisce in ogni punto A di S le direzioni t di DARBOUX, cioè quelle direzioni t tali che esista una quadrica Q , passante per A e intersecante S in una linea che in A ha un punto triplo, con tangenti coincidenti tutte e tre nella unica retta t . Lo HESSIANO di F_1 è proporzionale ad F_2 , cioè F_2 ed F_3 sono forme apolari.

Le direzioni coniugate a quelle di DARBOUX sono le direzioni di SEGRE, che il compianto geometra aveva definito per tutt'altra via.

Per evitare complicazioni di segni (il cui significato geometrico si illustra mediante la definizione sopra data di orientazione proiettiva di una retta) supporremo qui quasi sempre d'ora in poi di studiare superficie ad asintotiche *reali*.

Se nei calcoli che conducono alle forme F_2 , F_3 noi sostituiamo alle coordinate x di punto le coordinate ξ di piano tangente, noi giungeremo a due nuove forme F'_2 , F'_3 proporzionali ad F_2 ed a $-F_3$. Diventa spontanea l'idea che, scelte ad arbitrio le x , si debbono *normare* le ξ in modo che $F'_2 = F_2$. E questa convenzione è bene sia sempre osservata. Se p. es. a coordinate x si scelgono le coordinate cartesiane ortogonali x , y , z , supponendo uguale ad 1 la quarta coordinata omogenea, la precedente convenzione equivale ad assumere come prime tre coordinate omogenee del piano tangente non già i coseni direttori della normale, ma le coordinate di LELIEUVRE, che quindi si presentano in questi studii in modo affatto spontaneo.

Si dimostra che condizione necessaria e sufficiente per l'applicabilità proiettiva di due superficie è la uguaglianza dei rapporti $F_3:F_2$ ad esse corrispondenti. Perciò al rapporto $F_3:F_2$ si dà il nome di *elemento lineare proiettivo*.

Il significato geometrico di questo rapporto si può illustrare con metodi svariati, così come in modo molteplice si possono caratterizzare geometricamente le coppie di superficie applicabili.

Le forme isolate F_2 ed F_3 sono invarianti soltanto per collineazioni unimodulari: sorge la questione se non possiamo normare le coordinate x di punto (e quindi nello stesso tempo, per le precedenti convenzioni, anche le coordinate ξ di piano tangente) in guisa che i valori corrispondenti φ_2 , φ_3 delle forme precedenti ($\varphi_2:\varphi_3 = F_2:F_3$) siano, come il loro rapporto, invarianti per collineazioni qualsiasi. A questo punto si vede che le superficie rigate si debbono studiare a parte, e che il problema pre-

cedente si risolve *nel modo più semplice possibile*, imponendo a un certo invariante I delle due forme F_2, F_3 di essere uguale a -1 : cosa impossibile soltanto per le superficie rigate, in quanto che l'essere I identicamente nullo è proprietà caratteristica di queste superficie.

Escluse dunque le rigate, che si studiano a parte, noi abbiamo fissato il fattore di proporzionalità per le x e le ξ , ottenendo le coordinate che potremo chiamare *normali*. Ora si può dimostrare che la più generale congruenza di rette coniugata alla superficie S (cioè la più generale congruenza, le cui sviluppabili determinano su S un sistema coniugato) è la congruenza delle rette che congiungono un punto di coordinate omogenee x di S al punto, le cui coordinate omogenee sono $\Delta_2 x$ (ove il parametro Δ_2 è calcolato per la forma F_2); il più *semplice* modo di scegliere tale congruenza in modo intrinseco ed invariante è quello di scegliere come coordinate omogenee le coordinate normali (e quindi come corrispondente forma F_2 la forma φ_2).

La congruenza così determinata è la congruenza delle *normali proiettive*.

La forma φ_2 si può assumere come elemento lineare di una metrica; resta così definita per ogni superficie una geometria metrica invariante per collineazioni e di carattere intrinseco; così il concetto di normale proiettiva permette di estendere alla geometria proiettiva le definizioni di raggi di curvatura, e perfino il teorema di GAUSS sulla curvatura totale!

Studii notevoli si hanno studiando l'involuppo dei piani osculatori in un punto A delle superficie S alle linee uscenti da A e geodetiche nella metrica definita dal considerare F_2 oppure φ_2 come elemento lineare; si trovano così nuove proprietà geometriche della normale proiettiva. Ma forse più importanti sono gli studii analoghi per le *pangeodetiche*: quelle che annullano la variazione prima dell'integrale di $F_3: F_2$; l'equazione di queste linee si può scrivere nel modo più elegante uguagliando il determinante, di cui una riga è formata con le x , e le altre rispettivamente coi loro differenziali primo, secondo, terzo al determinante analogo costruito con le coordinate ξ di piano tangente e loro differenziali. Questa equazione dà una semplice proprietà geometrica che può servire a definire le *pangeodetiche*; la considerazione del cono involuppato dai piani osculatori in A alle *pangeodetiche* uscenti dal punto A della superficie conduce ad altre proprietà delle direzioni di SEGRE.

Date le forme F_2, F_3 (oppure soltanto il loro rapporto), la superficie S non è sempre individuata, ma è determinata soltanto

una classe di superficie proiettivamente applicabili. Per determinare la superficie S , (a meno naturalmente di collineazioni) si generalizzano le equazioni differenziali, che in geometria metrica permettono di risalire da un elemento lineare dato alla corrispondente superficie; ma, come in geometria metrica in tali equazioni accanto ai coefficienti dell'elemento lineare compaiono i coefficienti D della seconda forma fondamentale di GAUSS, così, per determinare completamente le equazioni differenziali analoghe per le coordinate x di punto è necessario conoscere, oltre ai coefficienti delle forme F_2, F_3 , anche i coefficienti di una terza forma P . Analogamente lo studio svolto per le coordinate di piano tangente conduce alla considerazione di una quarta forma Π . Le due forme P, Π sono quadratiche, apolari ad F_2 ; e, se sono date le forme F_2, F_3 , la differenza $\Pi - P$ è completamente determinata; cosicchè la superficie si può in modo più simmetrico definire con le forme F_2, F_3 e $P + \Pi$, di cui le ultime due apolari alla prima.

Da queste formule scende con grande facilità la determinazione delle superficie con asintotiche appartenenti a complessi lineari; altra loro applicazione si può fare ai sistemi coniugati e ai loro invarianti: due per la corrispondente equazione di LAPLACE in coordinate di punto, due per le coordinate di piano tangente. Si trovano notevolissime relazioni con la teoria delle congruenze W , di cui la superficie data sia falda focale; molte delle proprietà che così si trovano sono completamente nuove.

I metodi sopra esposti si possono con successo applicare all'esame dell'intorno di un punto A di una data superficie S . Un tale intorno definisce molte figure notevoli: le quadriche di DARBOUX, di cui già abbiamo discusso, e al fascio delle quali appartengono altre quadriche notevoli: la più importante delle quali è la quadrica di LIE. Questa quadrica si può anche definire come la quadrica, tale che la polarità corrispondente porti un punto di coordinate

$$\lambda x + \mu x_u + \nu x_v + \rho x_{uu} + \sigma x_{uv} + \tau x_{vv}$$

[dove x sono le coordinate di A , x_u, x_v , ecc. le derivate delle coordinate di un punto di S (rispetto alle coordinate curvilinee) calcolate nel punto A] nel piano di coordinate

$$\lambda \xi + \mu \xi_u + \nu \xi_v + \rho \xi_{uu} + \sigma \xi_{uv} + \tau \xi_{vv}.$$

Ma, oltre alla quadrica di LIE, un punto A di una data superficie S definisce molte altre varietà geometriche: in particolare molte rette uscenti da A . Di una, cioè della normale proiettiva,

abbiamo già parlato; altre si possono definire in modo molteplice; è ben notevole che le più importanti di queste rette si trovano tutte in uno stesso fascio, e che a quattro a quattro formano birapporti puramente numerici. Insieme alle rette di questo fascio appaiono notevoli le rette duali, poste nel piano tangente.

Così oltre alla polarità rispetto alla quadrica di LIE si possono definire altre corrispondenze d'importanza fondamentale; senza qui accennare alla loro teoria generale e ai legami con le quadriche di MOUTARD, ricorderemo soltanto una corrispondenza che è stata definita per mezzo di un'idea dovuta sostanzialmente al SEGRE. Questa corrispondenza è quella ottenuta, assumendo come omologhi il piano osculatore in A ad una linea L della superficie S uscente da A e il punto d'incontro dei piani tangenti ad S nel punto A e in due punti consecutivi posti su L . Con questi enti e queste corrispondenze si crea una notevole configurazione che ha molte proprietà geometriche notevoli, e che permette di porre in chiara luce le proprietà proiettive degli interni dei punti di una superficie.

E naturalmente questo studio porta alla considerazione di classi notevolissime di superficie. Ricorderò le superficie, le cui linee di DARBOUX (cioè le linee definite dalla $F_3 = 0$) oppure le linee di SEGRE (tangenti in ogni punto ad una direzione di SEGRE) sono linee piane; ricorderò pure le superficie studiate da TZITZEICA per via metrica, e ritrovate per via proiettiva da WILCZYNSKI, tacendo per brevità di altre classi di superficie, il cui studio sembra presentare uno speciale interesse.

Naturalmente, come abbiamo già detto, molti dei risultati precedenti cessano di valere per le superficie rigate; per queste la teoria si può anche studiare in modo diretto e più semplice. Si trova che, date le forme F_2 , F_3 , la superficie è rigata soltanto se F_3 è il cubo di uno dei fattori di F_2 , e che in tal caso la superficie è sempre proiettivamente deformabile, e che le superficie rigate proiettivamente applicabili su una rigata data dipendono generalmente da una funzione arbitraria di una sola variabile. Si può per una rigata scegliere un parametro, che nello studio proiettivo di una rigata ha l'ufficio che per le curve ha la lunghezza d'arco nella geometria metrica, e che perciò ha ricevuto il nome di arco proiettivo della rigata stessa. E si riesce a determinare (a meno di una collineazione) una rigata dando

alcuni pochi invarianti (che avranno un ufficio analogo a quello della curvatura e torsione nella geometria metrica delle curve) in funzione dell'arco proiettivo. E questi invarianti hanno notevoli significati geometrici. In questi studi hanno un ufficio essenziale le linee flecnodali d'una rigata, la congruenza e il complesso lineari osculatori; il loro studio, come pure lo studio delle particolari rigate che appartengono ad una congruenza oppure a un complesso lineare, conducono a risultati che lo spazio ci vieta di riassumere qui.

Molto interessante riesce lo studio delle congruenze W fatto per via puramente proiettiva; estremamente semplice è il sistema di equazioni differenziali a cui è ridotta la ricerca delle congruenze W di data prima falda focale. E ne risulta ben chiaro sia perchè la teoria solita svolta in base ad elementi metrici (e quindi estranei al problema) risulti tanto più complicata, sia perchè il problema sopra enunciato equivalga al problema della deformazione infinitesima delle superficie in geometria euclidea o non euclidea. La ragione di questo fatto sta in ciò. Se il punto x descrive una superficie S , e il piano $\bar{\xi}$ inviluppa un'altra superficie $\bar{S}$, se x e $\bar{\xi}$ sono funzioni degli stessi due parametri, e $\Sigma \bar{\xi} x = 0$, cioè se ogni piano $\bar{\xi}$ passa per il punto x corrispondente, le superficie $\bar{S}$ ed S sono falde focali della congruenza che congiunge punti omologhi soltanto se $\Sigma dx d\bar{\xi}$ è divisibile per $\Sigma \bar{\xi} dx$. E, soltanto quando il quoziente è un differenziale esatto, tale congruenza è W .

La teoria proiettiva delle congruenze W porta a una semplice trattazione delle trasformazioni di una superficie per congruenze W , della composizione di tali trasformazioni, e dei teoremi di permutabilità. Non solo per questa via si sono ritrovati i risultati dello JONAS per alcune già note classi di superficie notevoli dal punto di vista proiettivo, ma si è data una teoria altrettanto completa per altre classi di superficie. Per precisare meglio, se u, v sono le asintotiche di una superficie S ed è

$$F_2 : F_2 = \frac{\beta du^3 + \gamma dv^3}{du dv},$$

si è data una completa teoria delle trasformazioni per congruenze W delle superficie

R di TZITZEICA e DEMOULIN (per cui $\beta_u = \gamma_v$)

delle superficie di JONAS (per cui $\beta_v = \gamma_u$)

delle superficie isoterma asintotiche del FUBINI (per cui $\beta = \gamma$).

La prima classe di queste superficie comprende le superficie applicabili su una quadrica nella geometria metrica, tanto studiate da illustri geometri a cominciare dal BIANCHI; per una superficie R si trova il curioso risultato che, se essa è falda focale di una delle nostre congruenze W , di cui la seconda falda focale è ancora R , allora si può deformare proiettivamente la prima falda focale in guisa che, se ogni suo elemento trascina con sè nella deformazione il raggio corrispondente della congruenza W , la seconda falda focale diventi una retta. Ciò che dà degli stretti legami tra la teoria delle trasformazioni per congruenze W di una superficie R , e la teoria delle loro deformazioni proiettive.

Tra le congruenze W più notevoli ci sono le coppie di congruenze W appartenenti ciascuna a un complesso lineare e aventi a comune una falda focale, su cui le loro sviluppabili determinano lo stesso sistema coniugato; la ricerca di queste congruenze di WILCZYNSKI è ridotto a quella delle superficie a curvatura costante nella geometria metrica.

Con grande semplicità si compie lo studio delle congruenze le cui falde focali sono rigate dimostrando il teorema di SEGRE che, se nessuna delle due falde è una quadrica, alle generatrici di una falda corrispondono le generatrici dell'altra, provando che le superficie trasformate di una rigata mediante congruenze W sono tutte e solo quelle, per cui le asintotiche di un sistema appartengono ciascuna a un complesso lineare. In particolare lo studio delle congruenze W di cui una falda focale è quadrica prova che la seconda falda focale ha per asintotiche delle curve, ciascuna delle quali appartiene a un complesso lineare, e coincide con una delle superficie già studiate dal BIANCHI come superficie a curvatura nulla nello spazio ellittico.

Molte di queste ricerche si estendono agli iperspazii: si può per es. studiare la geometria delle superficie (a due dimensioni) nello spazio a quattro dimensioni; ma naturalmente è più importante lo studio delle ipersuperficie in uno spazio a un numero qualsiasi di dimensioni. Per tali ipersuperficie si possono ancora definire le forme F_2 , F_3 , P , Π , si può definire l'applicabilità proiettiva, si possono definire molti enti geometrici fondamentali: per es. la normale proiettiva, e una quadrica (di CECCHI) che è una elegantissima generalizzazione della quadrica di LIE. Ma si presentano anche dei fatti completamente nuovi: che cioè le forme P e Π sono in generale completamente determinate dalle

F_2 , F_3 , e che quindi, tranne casi assolutamente particolari, una ipersuperficie di uno spazio ad $n > 3$ dimensioni è proiettivamente indeformabile.

Altre estensioni si possono compiere: alla teoria delle congruenze e dei complessi di rette: in particolare la teoria della deformazione proiettiva delle congruenze di rette porta a problemi che meriterebbero di essere approfonditi più completamente, specialmente per le relazioni che questi problemi hanno con la teoria degli invarianti di un sistema coniugato, di cui sopra abbiamo discusso.

Così la considerazione di una superficie o ipersuperficie come luogo di elementi (insieme di un punto e di un piano che si appartengono) conduce spontaneamente allo studio delle varietà di elementi; dai risultati che si ottengono per questa via la geometria delle superficie e delle ipersuperficie riceve luce più perspicua.

Uno studio di grande importanza, anche soltanto nel caso delle superficie dello spazio a tre dimensioni, è quello degli invarianti del rapporto $F_3:F_2$, o, ciò che è lo stesso per il caso delle superficie non rigate, quello degli invarianti delle coppie di forme φ_2 , φ_3 . Lo studio di questi invarianti (uno dei quali H è nullo soltanto per le superficie isoterma asintotiche) permette di risolvere il primo problema dell'applicabilità proiettiva: quello cioè di riconoscere se due date superficie sono, oppure no, proiettivamente applicabili, e, nel caso affermativo, di determinare tutte le corrispondenze tra i punti dell'una e i punti dell'altra che sono applicabilità proiettive. Lo studio di questo problema porta con sé la risoluzione di un'altra questione: quella di riconoscere se una superficie può essere applicabile in più di un modo sopra sé stessa. È evidente che le superficie che così si determinano sono l'analogo delle superficie che in geometria metrica sono applicabili su una superficie di rotazione.

Assai più lungo e più difficile è la discussione del secondo problema dell'applicabilità, del problema cioè di trovare tutte le superficie applicabili sopra una superficie data. Questo problema anzi si può enunciare in modo più generale, proponendo la questione di riconoscere se, prefissato ad arbitrio il rapporto $F_3:F_2$, esistono delle superficie corrispondenti, e in caso affermativo determinarle tutte. Questo secondo enunciato è il più conveniente nella geometria proiettivo-differenziale; perchè, a differenza di quanto avviene nella geometria metrica, in cui

l'elemento lineare è una forma quadratica (definita) qualsiasi, non ogni rapporto $F_3:F_2$ corrisponde a qualche superficie effettiva.

Il fondamento di queste ricerche risiede nell'esame delle condizioni d'integrabilità delle equazioni differenziali relative alle coordinate x dei punti (o ξ dei piani tangenti) di una superficie di cui sono date le forme fondamentali: cioè le forme F_2 , F_3 e la forma P (oppure Π , oppure $P + \Pi$). Assunti poi come incognite i coefficienti di P (oppure di Π , oppure di $P + \Pi$), queste condizioni di integrabilità (delle equazioni differenziali nelle x o nella ξ) diventano un nuovo sistema di equazioni differenziali in questi coefficienti (così come le equazioni di GAUSS e CODAZZI della geometria metrica possono considerarsi equazioni differenziali nelle D , D' , D'' pensate come incognite). Escluse le rigate, di cui abbiamo già fatto cenno, si trova che una superficie o non è proiettivamente deformabile, oppure lo è in ∞^1 , o ∞^2 , o ∞^3 maniere. Le superficie proiettivamente deformabili hanno intimi legami con classi di superficie già studiate per altra via: per citare un solo esempio con le superficie R (e un loro caso limite caratterizzato da $\beta_r = 0$). Le superficie deformabili in ∞^3 modi sono le superficie isoterma asintotiche, per cui la forma φ_2 ha curvatura K costante, donde segue (se $K = -2$) che le loro asintotiche appartengono ciascuna a un complesso lineare.

Molte e svariate altre ricerche hanno permesso di completare la teoria: per es. lo studio delle quadriche di MOUTARD; e molte altre ricerche sembrano doversi ancora compiere. Specialmente interessante sembra per es. lo studio delle superficie appartenenti a un complesso quadratico (tali cioè che da ogni loro punto escono due tangenti coniugate appartenenti al complesso). Questo studio, di cui è caso particolare quello in cui il complesso quadratico si scompone in due complessi lineari (WILCZYNSKI), è già stato iniziato per via metrica, ed ha le più strette relazioni con la deformazione metrica delle quadriche.

GUIDO FUBINI