UMI

Sunti di lavori esteri

* Lavori di: M. Fréchet, Niels Nielsen, Z. Suetuna, K. Shibata, M. Fujiwara, K. Kurosu, Y. Okada, T. Kubota, T. Takasu, 8. Narumi, T. Takagi, 8. Kakeya, M. Tsuji

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **5** (1926), n.1, p. 23–27.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1926_1_5_1_23_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 1926.

SUNTI DI LAVORI ESTERI

M. FRÉCHET dell'Università di Strasburgo.

I. - *Sur une définition géométrique des espaces abstraits affines.* (Ann. Soc. Alonaise de Math., 1925).

II. - *Les espaces abstraits topologiquement affines.* (Acta Math., T. 47, 1926).

Da tempo si è pensato di dare, degli spazi affini, una definizione sotto forma indipendente della natura degli spazi considerati [1]. Le definizioni date erano più o meno restrittive, ma in generale erano concepite in modo da evitare l'introduzione di considerazioni di continuità.

Recentemente, BANACH e WIENER hanno, indipendentemente l'uno dall'altro, associate le antiche definizioni degli spazî astratti affini alle nozioni che stanno a fondamento della Topologia degli insiemi astratti. Le loro definizioni facevano apparire, come spazî affini suscettibili di uno studio topologico, molti spazî funzionali importanti; tuttavia, altri spazî funzionali di non minore importanza, quali quello delle funzioni olomorfe o quello delle funzioni misurabili, non rientrerebbero nelle loro definizioni.

1. Nella prima delle due Memorie qui riassunte, l'A. ha cercato di allargare le definizioni dovute agli autori precedenti, in modo da fare comprendere fra gli spazî topologicamente affini i due spazî testè ricordati e varî altri non meno importanti.

Nella definizione di BANACH e WIENER, il limite di una successione di punti si definisce ammettendone l'esistenza di una « distanza », e la distanza di due punti veniva a risultare naturalmente identica alla « lunghezza » del vettore avente i due punti come estremi. L'A. ha invece ritenuto vantaggioso di dissociare le due idee

[1] V. p. es. S. PINCHERLE e U. AMALDI: *Le operazioni distributive, ecc.* (Bologna, Zanichelli, 1901).

Se su di una retta astratta *fissa* determinata, la lunghezza del vettore AB tende a zero, e se A rimane fisso, B tenderà ad A. Ma se la retta AB non è fissa, la convergenza di B ad A non implicherà che la lunghezza del vettore AB tenda a zero: nello spazio affine, i valori assoluti delle « lunghezze » dei vettori hanno scarsa importanza.

La parte essenziale spetta invece ai *rapporti* della lunghezza di due vettori allineati o paralleli.

Invece è la convergenza a zero della « distanza » di B verso A che sarà equivalente alla convergenza di B verso A.

Vi è in ciò una distinzione che può sembrare sottile, ma che è giustificata da una osservazione di URYSOHN; questo autore l'ha enunciata in forma precisa, ma essa può compendiarsi brevemente come segue: Nello spazio delle funzioni intere non vi è « distanza » che possa possedere le proprietà ordinarie della « lunghezza » dei vettori.

L'A., dopo di avere precisata la definizione degli spazî astratti topologicamente affini secondo il concetto che si è ora indicato, porta cinque esempi precisi — ed importanti nell'Analisi — di spazî che sono da riguardarsi come affini al suo punto di vista e che non rientrano nelle categorie studiate da BANACH e WIENER. Egli termina ponendo la questione di riconoscere quando accada che il fatto, per uno spazio topologico, di essere affine, sia imposto a questo spazio da condizioni di carattere topologico, e di determinare quali siano queste condizioni.

II. Nella seconda delle Memorie qui riassunte, l'A. mostra come si possa sostituire alla ordinaria definizione degli spazî affini, che si fonda principalmente sulle proprietà formali (associativa, ecc.) dei vettori, una definizione di carattere più geometrico, o per lo meno che valga a porre in maggiore evidenza la somiglianza degli spazî astratti affini collo spazio euclideo della Geometria elementare. Tuttavia, l'A. non si è preoccupato soverchiamente di ridurre le condizioni e gli assiomi che costituiscono questa definizione alla loro forma più semplice dal punto di vista logico. Simili ricerche conducono non di rado a formulare postulati o definizioni che danno poco campo all'intuizione.

Sembra nuova la definizione del piano; per l'A. « un piano « è un insieme di punti che non è riducibile nè ad una retta, « nè ad un punto; tale inoltre che ogni retta che congiunge due « punti dell'insieme vi appartiene per intero, e tale infine che è « *irriducibile rispetto a queste condizioni*, cioè che coincide con « quelli fra i suoi sotto-insiemi che godono delle medesime « proprietà ». (*Dall'Autore*).

NIELS NIELSEN: *Note sur certains développements d'une fonction holomorphe.*

L'Autore applicando il suo principio di inversione (« Journal de Crelle », tomo 132) indica due sviluppi diversi di una funzione olomorfa nell'intorno della origine, sviluppi il cui campo di convergenza è generalmente finito.

—— *Recherches sur les fonctions cylindriques et sur certaines fonctions analogues.*

Sono ricerche sulle derivate della funzione di LOMMEL, prese rispetto ai due parametri, e sulle equazioni differenziali omogenee e lineari del quarto e del sesto ordine, relative alle dette derivate.

Si danno anche le rappresentazioni integrali delle funzioni in discorso, e certi sviluppi in serie ad esse relativi.

Japanese Journal of Mathematics. — Sotto gli auspici del Consiglio nazionale di ricerche del Giappone, si pubblica da circa un anno un nuovo periodico che promette di prendere un posto notevole nella letteratura matematica mondiale. È questo il « Japanese Journal of Mathematics », del quale compaiono annualmente quattro fascicoli di circa 50 pagine in nitida veste tipografica, e che contiene, oltre a note preventive o riassuntive e memorie di non grande estensione, brevi sunti di lavori pubblicati in altri giornali giapponesi e spesso redatti dagli Autori stessi.

Per dare un'idea dell'interesse del nuovo giornale, diamo qui alcune brevi indicazioni sui lavori contenuti nel primo tomo del periodico; i numeri tra parentesi indicano il posto occupato dal lavoro nel volume.

Z. SUETUNA presenta tre note: l'una (1) riguarda, per le funzioni strettamente collegate alla $\zeta(s)$ di RIEMANN e dette funzioni L, le questioni della frequenza degli zeri posti sulla linea critica $\sigma = \frac{1}{2}$ $(s = \sigma + it)$, estendendo proposizioni già date da HARDY e LITTLEWOOD; l'altra (2) ricerca una valutazione asintotica della somma $\sum_{n=1}^{(x)} \nu(n)$, dove ν è il numero delle decomposizioni di n in un prodotto di due fattori primi fra loro; la terza (15), più estesa, dà valori medî asintotici presi lungo parallele all'asse immaginario, dei quadrati delle funzioni L, estendendo risultati già noti per la funzione riemanniana $\zeta(s)$.

K. SHIBATA (3) tratta della approssimazione di un numero irrazionale ω mediante frazioni razionali $\frac{p_n}{q_n}$, in modo che sia

$$\left|\omega - \frac{p_n}{q_n}\right| < \frac{1}{\lambda q_n^2};$$

cosa possibile per ogni numero irrazionale, eccettuati alcuni eccezionali ω dipendenti dalla scelta di λ. Due lavori sull'argomento giunti tardivamente a conoscenza dell'A. sono dovuti a PERRON.

Di M. FUJIWARA si ha una breve Nota (4) riferentesi all'argomento precedente, ed una (7) estensione del teorema di HURWITZ-ROUTH sulle equazioni algebriche a radici a parte reale negativa, alle funzioni intere di genere zero ed uno.

Sull'argomento dell'approssimazione di numeri irrazionali mediante razionali, e sulla convergenza delle frazioni continue, si ha pure una Nota (5) di K. KUROSU (di cui però il primo paragrafo è da ritenersi non esatto).

Y. OKADA generalizza (6) un teorema di HURWITZ, il quale dà la condizione necessaria e sufficiente perchè il polinomio $\sum_{i=0}^{2n} e_i f^{(i)}$, dove $f(x)$ è un qualunque polinomio di grado $2n$ non negativo, sia sempre positivo, trovando la condizione necessaria e sufficiente perchè sia tale $\sum_{i=0}^{2n} e_i h^i(x) f^{(i)}(x)$, $h(x)$ essendo un polinomio reale qualunque.

Lo stesso A. valuta in (8), l'approssimazione, mediante polinomi a coefficienti interi, di una funzione soddisfacente alla condizione di LIPSCHITZ; dà in (9) alcuni teoremi assai generali su passaggi al limite in integrali singolari; tratta infine, in (10), il problema della convergenza di un'espressione della forma $\Sigma b_\nu(x) e_\nu z^\nu$ alla continuazione analitica delle funzioni definite dall'elemento $\Sigma e_\nu z^\nu$, quando x tende all'infinito, ottenendo proposizioni generali in cui sono contenuti risultati avuti in casi speciali da BOREL, MITTAG-LEFFLER, KNOPP, LE ROY, PERRON, ecc.

T. KUBOTA (11) in relazione con un lavoro di H. LIEBMANN sulla geometria di inversione di MOEBIUS, determina due invarianti delle curve piane in questa geometria; dà pure risultati relativi ad invarianti differenziali del gruppo di LAGUERRE e alla loro interpretazione.

Nel (12), T. TAKASU, colla considerazione del doppio orientamento, reca perfezionamento alla teoria proiettiva della Geometria non euclidea; nel lavoro più esteso (13, parte I e 19, parte II) lo stesso A. determina le equazioni naturali di curve piane o dello spazio rispetto al gruppo di trasformazioni cicliche puntuali e le loro duali naturali, per mezzo delle coordinate rispettivamente tetracicliche e pentasferiche e le loro duali.

S. NARUMI, in (14), dimostra che la proprietà della funzione associata ad una serie di DIRICHLET con processo di sommazione, di essere non negativa, decrescente e continua, proprietà data nel caso che la serie abbia un dominio di convergenza, è vera anche senza questa restrizione.

T. TAKAGI deduce (16), da un teorema sulle matrici ad elementi complessi, una proposizione di carattere algebrico sulla determinazione di una funzione razionale, che si collega strettamente ad una questione di carattere analitico che forma oggetto di un noto teorema di CARATHÉODORY e FEJÉR (1): però in una successiva nota che l'A. pubblica nel T. II, p. 13 del « Japanese Journal » egli rileva che si può dare un caso in cui la funzione razionale in discorso non esiste.

Nel (17), S. KAKEYA espone un modo generale di rappresentare un numero mediante serie di interi, dipendenti da una certa *funzione scala*, modo che comprende come casi particolari la rappresentazione in frazione decimale e quella in frazione continua.

Una estesa Memoria (18) di M. TSUJI, riguarda la distribuzione dei punti limiti degli zeri delle sezioni (somme parziali) di una serie di potenze fuori della circonferenza di convergenza e sotto certe ipotesi sui coefficienti della serie, viene alla conclusione che in varî casi riferentesi a queste ipotesi, non vi sono tali punti limiti esterni al cerchio. I teoremi finora noti riguardavano i punti limiti posti all'interno del cerchio di convergenza, o sulla circonferenza.

Viene poi studiata la distribuzione degli zeri delle sezioni di una trascendente intera, e vi è inserita una dimostrazione assai semplice, dovuta al prof. KAKEYA, del teorema del prof. OKADA che la condizione necessaria e sufficiente perchè $\sum_0^\infty a_n x^n$ sia intera, è che tenda all'infinito il massimo modulo delle radici delle sue sezioni.

Infine, K. SHIBATA (20) studia la distribuzione delle radici dei polinomî soddisfacenti a una nota equazione differenziale del secondo ordine di tipo ipergeometrico (2), in casi finora scarsamente considerati. (*u.*)

(1) Rendiconti Circ. Mat., Palermo, T. 32.

(2) Non sono altro che i polinomî di JACOBI.