Bollettino
Unione Matematica
Italiana

Cesare Rimini

Geometrìa e correnti alternative

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **5** (1926), n.1, p. 12–21.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1926_1_5_1_12_0>

Geometria e correnti alternative.

Nota di CESARE RIMINI [1]

I. - GENERALITÀ

1. Nella trattazione delle quistioni concernenti le grandezze che entrano in giuoco nella tecnica dei circuiti e macchine a correnti alternative, è di grande giovamento la rappresentazione di esse mediante i numeri complessi, cui si perviene facilmente quando, come d'ordinario accade, le grandezze alternative che si considerano sono *isofrequenziali* e la loro variazione risponde alla legge sinusoidale.

Tale rappresentazione si fonda sulla osservazione che la grandezza alternativa

$$a = A \cos(\omega t + \varphi)$$

di cui A è il valor massimo, ω la *pulsazione* (prodotto di 2π per la frequenza), φ è la *fase* (frazione di periodo trascorsa al tempo $t = 0$), corrisponde alla parte reale del numero complesso

$$Ae^{j(\omega t + \varphi)} = Ae^{j\varphi} \cdot e^{j\omega t} \text{ [2]}$$

la cui considerazione può quindi sostituirsi a quella della corrispondente grandezza alternativa.

Il numero or ora scritto corrisponde al prodotto $\overline{A} = Ae^{j\varphi}$ per il numero $e^{j\omega t}$, il quale alla sua volta rappresenta al modo stesso una grandezza alternativa *unitaria* (di valor massimo *uno*, e di fase *zero*). Al fattore $\overline{A} = Ae^{j\varphi}$, che contiene in sè gli elementi caratteristici, ampiezza e fase, della grandezza data, diamo il nome di *caratteristica* [3] di questa, e la sua nozione è necessaria e sufficiente alla determinazione della grandezza stessa, se, come abbiamo supposto, la frequenza è costante. Esso può interpretarsi come un operatore che occorre applicare — per via di

(1) Ai concetti cui è informata questa Nota è dato più ampio svolgimento in una Monografia, in corso di pubblicazione nel periodico « L'Elettrotecnica ».

(2) Indichiamo con j l'unità imaginaria.

(3) Cfr. DONATI: *Diagramma generale per trasformatori a corrente alternativa e motori asincroni polifasi.* Atti Accademia delle Scienze di Bologna, 1905.

moltiplicazione — alla grandezza alternativa unitaria, per ottenere la grandezza data.

Secondo tale concetto, qualunque numero complesso, se non è esso stesso caratteristica di una grandezza alternativa, può interpretarsi come un operatore che applicato ad una tale caratteristica ne modifica il modulo e l'argomento secondo la regola pel prodotto di numeri complessi, originando una nuova grandezza alternativa la cui ampiezza ed il cui angolo di fase corrispondono a quelli della primitiva moltiplicati pel modulo e rispettivamente aumentati dell'argomento dell'operatore.

Un vantaggio notevole del metodo in parola consiste in ciò che, la derivazione rispetto al tempo adducendo semplicemente una moltiplicazione per $j\omega$ $\Big($equivalente alla moltiplicazione dell'ampiezza per ω e ad una anticipazione della fase misurata angolarmente da $\frac{\pi}{2}\Big)$, ogni espressione differenziale lineare fra grandezze alternative, si traduce in una espressione algebrica lineare rispetto alle caratteristiche, a coefficienti in generale complessi.

Poichè poi ogni vincolo fra grandezze fisiche a variazione alternativa si traduce in una equazione che presenta i caratteri della omogeneità rispetto alle grandezze alternative stesse, il fattore $e^{j\omega t}$ potrà essere sempre soppresso fin dall'inizio, riducendosi così l'equazione stessa ad una semplice relazione fra le caratteristiche, senza che rimanga traccia della variabile tempo.

2. I caratteri fondamentali dianzi delineati si presentano chiaramente nelle equazioni che esprimono, pel caso di correnti alternative permanenti, le leggi generali della elettricità e dell'elettromagnetismo, ed è facile vedere che queste sono inoltre *lineari* rispetto alle grandezze alternative in giuoco. Di più esse sono formalmente identiche alle analoghe valevoli per correnti continue.

Si verifica infatti che accanto alle equazioni fondamentali:

$$a) \qquad D = RI + V$$

$$b) \qquad \Sigma I = 0$$

$$c) \qquad \mathfrak{R}\Phi = nI$$

$$d) \qquad E = -\frac{d\Phi}{dt}$$

che esprimono, pel caso di correnti continue:

a) la legge di OHM, applicata ad un tratto di circuito di resistenza R, pel quale D è la differenza di potenziale corrispondente alla somma algebrica delle forze elettromotrici in esso attive, I è la intensità della corrente circolante, V la d. d. p. esistente ai capi;

b) la seconda legge di KIRCHHOFF relativa alla somma delle correnti affluenti ad un nodo di una rete;

c) la legge dei circuiti magnetici, che, analogamente alla legge di OHM, lega la forza magnetomotrice nI al flusso di induzione magnetica Φ concatenato con essa ed alla riluttanza $\mathfrak{R}$ del tubo occupato dal flusso stesso;

d) la legge di induzione elettromagnetica che dà la grandezza della forza elettromotrice E generata in un circuito per effetto della variazione del flusso magnetico Φ con esso concatenato,

sussistono le altre:

$$a)' \qquad \overline{D} = \overline{Z}\,\overline{I} + \overline{V}$$

$$b)' \qquad \Sigma \overline{I} = 0$$

$$c)' \qquad \overline{\mathfrak{R}}\,\overline{\Phi} = n\overline{I}$$

$$d)' \qquad \overline{E} = -\frac{d\overline{\Phi}}{dt}$$

che traducono le analoghe relazioni pel caso di forze elettromotrici e correnti alternative. L'unica differenza sta in ciò, che alle resistenze e riluttanze R ed $\mathfrak{R}$ si sostituiscono delle grandezze rappresentate da operatori complessi $\overline{Z}$ e $\overline{\mathfrak{R}}$, il che sta ad indicare che le grandezze alternative per cui questi risultano moltiplicati subiscono in generale, oltre una modificazione nell'ampiezza, misurata dal modulo dell'operatore, anche uno spostamento di fase, misurato dall'argomento dell'operatore stesso. All'operatore complesso $\overline{Z}$ che sostituisce la resistenza, si dà il nome di *impedenza*, mentre alla $\overline{\mathfrak{R}}$ conserveremo il nome di *riluttanza*, osservando che nel caso di variazioni alternative, per circuiti magnetici comprendenti ferro, occorre attribuirle un valore complesso per tenere approssimativamente conto dell'effetto di isteresi.

Le formule *b*)′ e *c*)′ si deducono dalle corrispondenti *b*) e *c*) scrivendo i valori istantanei di queste in forma complessa e sopprimendo il fattore $e^{j\omega t}$ comune ai due membri.

Meno semplice è la deduzione della *a*)′ dalla legge OHM. Scrivendo infatti la *a*) nel caso di correnti e d. d. p. variabili, i cui valori istantanei indichiamo con le corrispondenti lettere minuscole, si ha [1]:

$$d - L\frac{di}{dt} = Ri + v$$

dove il termine $-L\frac{di}{dt}$ rappresenta la forza elettromotrice d'autoinduzione che deve aggiungersi alle altre agenti nel circuito e cumulativamente rappresentate da d.

Se d e v sono alternative sinusoidali e $\overline{D}$ e $\overline{V}$ le loro caratteristiche, la precedente ammette un integrale sinusoidale la cui caratteristica $\overline{I}$ si riconosce subito soddisfare la $a)'$ con $\overline{Z} = R + jL\omega$. E tanto basta, perchè l'espressione effettiva della corrente non potrà differire da esso che per una funzione soddisfacente a:

$$Ri + L\frac{di}{dt} = 0.$$

Ora, l'integrale generale di questa equazione decresce rapidamente col tempo, per modo che, in regime permanente, la influenza della funzione additiva è da ritenersi trascurabile.

Infine, quanto alla formula $d)$, essa suppone già che Φ ed E siano variabili. Nel caso speciale in cui la variazione di Φ è sinusoidale, sia perchè è sinusoidale la variazione del campo magnetico supposto di direzione invariabile, sia perchè, essendo costante il campo, varia sinusoidalmente quello che si potrebbe chiamare il *coefficiente di concatenamento* di esso rispetto al circuito (circuito e campo in moto relativo rotatorio uniforme), sarà Φ rappresentabile con un certo numero complesso $\overline{\Phi}$ e la $d)'$ assume l'aspetto

$$\overline{E} = j\omega\overline{\Phi}$$

ove ω rappresenta in ogni caso la pulsazione del flusso, corrispondente alla pulsazione del campo alternativo se questo è fisso rispetto al circuito, o alla velocità angolare relativa se esso è costante ma mobile rispetto al circuito.

Le relazioni sono dunque in ogni caso *lineari* rispetto alle caratteristiche delle grandezze alternative.

[1] Si suppone qui che il circuito non risenta la influenza induttiva di altri. In caso contrario si può facilmente vedere che mutano i valori dei coefficienti, ma le equazioni (che in tal caso sono più d'una) serbano la medesima forma.

3. Siccome lo studio di qualunque sistema di circuiti a regime alternativo isofrequenziale conduce sempre a equazioni del tipo considerato, in numero sufficiente per la determinazione delle grandezze alternative incognite in giuoco, si conclude che le caratteristiche di queste sono sempre determinabili come espressioni, in generale, fratte dei coefficienti delle equazioni, e questi poi non sono che le costanti fisiche della questione, per lo più accessibili al calcolo od alla determinazione sperimentale.

Se si imaginano ora i numeri complessi rappresentati sul piano di GAUSS, si ottiene immediatamente una imagine geometrica della questione proposta, mediante una configurazione nella quale le grandezze alternative vengono rappresentate da vettori piani, di cui la grandezza e l'orientazione corrispondono all'ampiezza ed alla fase. E se si volessero conoscere i valori istantanei, basterebbe imprimere ad essi una rotazione con velocità angolare ω, corrispondentemente al fattore $e^{j\omega t}$ e considerare, istante per istante, le proiezioni di tali vettori rotanti sull'asse reale. Ma tale operazione non è neppure necessaria, perchè nella tecnica non occorre avere sott'occhio che i valori massimi — o quantità ad essi proporzionali — e gli angoli corrispondenti alle fasi, ed a ciò provvedono completamente le caratteristiche.

Operando in tal guisa, ad ogni espressione analitica corrisponde un complesso di costruzioni geometriche che, effettuate sui punti indici dei numeri complessi in giuoco, conduce alla effettiva determinazione dei punti rappresentativi delle espressioni considerate.

A tale riguardo devesi osservare che, mentre la somma e la moltiplicazione (con un addendo o fattore costante) determinano una trasformazione omografica (rispettivamente una traslazione ed una similitudine accompagnata da una rotazione) della configurazione di partenza, la divisione invece modifica il divisore secondo una trasformazione per raggi vettori reciproci, combinata con un ribaltamento rispetto all'asse reale, oltre eventualmente una similitudine [1]. Tutte queste operazioni, come è noto, trasformano cerchi in cerchi (comprendendo fra i cerchi le rette), determinando in ogni caso fra i due cerchi omologhi una corri-

[1] Il punto $\frac{\overline{A}}{\overline{Z}}$ si deduce da $\overline{Z}$ mutando segno all'argomento (ribaltamento rispetto all'asse reale), mutando il modulo nel suo inverso (inversione rispetto al cerchio di raggio unitario col centro nell'origine) e moltiplicando per $\overline{A}$ (rotazione intorno all'origine di un angolo eguale all'argomento di $\overline{A}$ e dilatazione radiale misurata dal modulo di $\overline{A}$).

spondenza omografica e che quindi conserva i birapporti. Esse sono tutte casi particolari della trasformazione generale lineare sulla variabile complessa:

$$\overline{Z'} = \frac{\overline{A}\,\overline{Z} + \overline{B}}{\overline{C}\,\overline{Z} + \overline{D}}$$

che, come è noto, opera omograficamente sulla retta e sul cerchio, mentre opera sugli elementi reali del piano complesso secondo una (particolare) trasformazione quadratica.

Quanto al prodotto di vettori, è da notarsi che esso risulta una operazione che trasforma vettori piani in vettori appartenenti allo stesso piano, e quindi non è a confondersi con la moltiplicazione vettoriale: il prodotto qui considerato non essendo che la interpretazione geometrica dell'ordinario prodotto di numeri, competono ad esso tutte le proprietà di questo; in particolare esso soddisfa sia alla legge commutativa, sia alla legge di annullamento, il che non avviene pel prodotto vettoriale propriamente detto.

Di due vettori piani $\overline{A}$ e $\overline{B}$ si può ancora considerare il prodotto *scalare* $\overline{A} \times \overline{B}$, che si definisce con

$$\overline{A} \times \overline{B} = AB \cos \varphi$$

essendo φ la differenza degli argomenti di $\overline{A}$ e $\overline{B}$. Tale prodotto, nel caso in cui $\overline{A}$ e $\overline{B}$ rappresentano grandezze alternative, e non siano quindi dei semplici operatori fattoriali, corrisponde al doppio dell'integrale

$$\frac{1}{T}\int_0^T ab\,dt$$

che rappresenta la media dei valori che, durante un periodo, assume il prodotto ab dei valori istantanei delle grandezze alternative:

$$a = Ae^{j(\omega t + \alpha)}, \quad b = Be^{j(\omega t + \alpha + \varphi)}.$$

E se, per modulo della caratteristica, anzichè il valor massimo, si assume il valore *efficace* (che si ottiene dividendo quello per $\sqrt{2}$), ne segue che il prodotto scalare considerato equivale esattamente all'integrale scritto. La considerazione di questa grandezza scalare è importantissima perchè se $\overline{A}$ e $\overline{B}$ stanno a rappresentare rispettivamente la d. d. p. che misura una certa forza elettromotrice attiva in un circuito e la corrente circolante in questo, l'integrale predetto misura notoriamente il valor medio della *potenza* fornita o assorbita per parte della forza elettromotrice, cosicchè alla espressione della potenza, che nel caso di d. d. d. continua D e corrente costante I è data da $D.I$, fa riscontro, nel caso di correnti alternative, la espressione $\overline{D} \times \overline{I}$ ove $\overline{D}$, $\overline{I}$ sono le caratteristiche riferite ai valori efficaci.

4. Le considerazioni precedenti indicano chiaramente la via da seguirsi per ottenere in ogni singolo caso la immagine geometrica dei fatti elettrici che hanno luogo in un circuito o sistema di circuiti (apparecchi o macchine) percorsi da correnti alternative.

In generale avverrà che i coefficienti del corrispondente sistema di equazioni lineari conterranno dei parametri la cui variazione corrisponde ai vari stati di funzionamento del sistema elettrico. Tali parametri affetteranno così anche le espressioni che, risolvendo le equazioni stesse, forniscono il valore delle caratteristiche delle grandezze alternative incognite, per modo che queste espressioni nel caso, assai frequente, di un solo parametro reale, saranno senz'altro le equazioni parametriche del *diagramma*, cioè della linea luogo degli indici delle caratteristiche stesse.

Indicando il parametro con t, quelle espressioni assumono in generale l'aspetto

$$\frac{\overline{A} + \overline{B}t + \overline{C}t^2 + \ldots.}{\overline{A'} + \overline{B'}t + \overline{C'}t^2 + \ldots.}$$

e si può dimostrare che ad esse corrisponde in generale una curva algebrica razionale d'ordine $m + n$, essendo n il grado del polinomio denominatore, ed m il maggiore fra i due gradi numeratore e denominatore, avente ciascuno dei punti ciclici come punto n-plo [1]. Così se $m = n$, risultando $2n$ l'ordine della curva, i punti ciclici esauriscono le intersezioni di essa con la retta all'infinito, e pertanto la curva si svolge tutto al finito. Per $m = n = 1$ si ha il cerchio.

[1] Se p è il massimo grado del polinomio a coefficienti reali che divide il denominatore, l'ordine della curva si abbassa di p unità e il grado di moltiplicità dei punti ciclici si riduce a $n - p$. In particolare, se $m = n = 2$ ed il denominatore è a coefficienti reali, si ottiene una conica generale.

5. I diagrammi per tal modo costruiti, oltre ad essere di grande giovamento per la determinazione grafica delle grandezze alternative elettriche e magnetiche in giuoco, possono venire utilizzati anche per la valutazione delle *potenze elettriche*, al quale scopo si perviene seguendo il metodo generale che andiamo ad esporre.

Sia S una grandezza scalare funzione di vettori $\bar{u}$, $\bar{v}$, $\bar{w}$,.... caratteristiche delle grandezze alternative inerenti ad un determinato apparecchio. Se, come in generale accade ([1]), queste grandezze sono rappresentabili mediante vettori che alla lor volta dipendono dalla posizione di un punto variabile P il quale può interpretarsi come indice dello stato variabile di funzionamento dell'apparecchio stesso, sarà la S in definitiva funzione di P, cioè delle sue coordinate cartesiane ortogonali x, y, diciamo:

$$S = f(x, y).$$

La curva $f(x, y) = 0$ definirà gli stati di funzionamento pei quali la grandezza S assume valore nullo, e la S stessa, per un'altra posizione di P, sarà misurata dalla *potenza* (geometrica) *di P* rispetto alla curva $f(x, y) = 0$, dando questo nome al valore che la funzione $f(x, y)$ (eventualmente moltiplicata per un fattore costante) assume nel punto P.

Ogni qualvolta la curva $f = 0$ sia tale che per essa si possa definire graficamente la potenza geometrica, essa stessa, che chiameremo perciò la *curva fondamentale* della grandezza S considerata, fornirà una rappresentazione grafica assai semplice della grandezza S stessa, in quanto questa corrisponderà alla potenza geometrica del punto P rispetto alla curva fondamentale.

Ciò avviene senz'altro quando tale curva risulta essere una retta od un cerchio, nei quali casi la *distanza* (valutata algebricamente) di P della retta, o la *potenza* di P rispetto al cerchio ([2]) dànno senz'altro una misura della grandezza S. La retta e il cerchio anzi sono i primi e più semplici rappresentanti di due importanti classi di curve algebriche, per le quali si può dare una definizione geometrica della potenza: sono esse le curve che chiameremo *paraboliche* (aventi cioè le intersezioni con la retta

([1]) Ciò avremo agio di vedere nella 2ª parte di questa Nota, dedicata alle applicazioni.

([2]) Uguale alla differenza fra il quadrato della distanza di P del centro ed il quadrato del raggio, oppure al prodotto $\overline{PP_1} \cdot \overline{PP_2}$ essendo P_1, P_2 le intersezioni del cerchio con una trasversale per P.

all'infinito localizzate in un unico punto Q_∞) e le curve *cicliche* (d'ordine $2n$ aventi le medesime intersezioni localizzate nei punti ciclici, ciascuno dei quali ne assorbe n). Per le prime, la potenza corrisponde al prodotto delle proiezioni dei segmenti orientati PP_1, PP_2, PP_3,.... sulla direzione ortogonale a Q_∞, per le seconde invece essa corrisponde senz'altro al prodotto $PP_1 . PP_2 . PP_3$,...., essendo in ogni caso P_1, P_2, P_3,.... le intersezioni della curva con una qualunque retta per P.

Per le applicazioni alla elettricità, giova notare che la espressione della potenza del punto P rispetto a un cerchio di equazione $C = 0$ si semplifica quando P, anzichè esser libero, è vincolato a percorrere un altro cerchio di equazione $C' = 0$. In tal caso infatti la espressione generica della potenza richiesta C, può anche rappresentarsi con $C - C'$, dappoichè P va ad occupare posizioni nelle quali è nulla C'. E siccome $C - C' = 0$ è la equazione dell'asse radicale dei due cerchi [1], ne segue che *la potenza rispetto a un cerchio dei punti di un altro cerchio è proporzionale alle distanze di questi dall'asse radicale dei due cerchi.*

In particolare, se il primo cerchio si riduce a un punto O, è facile vedere che l'asse radicale coincide con la *semipolare* di O rispetto al cerchio C', cioè con la retta parallela alla polare e che divide a metà la distanza di questa da O.

6. Per le applicazioni interessa particolarmente il caso in cui le grandezze S rappresentano *potenze elettriche*. Se poi queste sono le potenze messe in giuoco dalle macchine, si possono fare le seguenti considerazioni in ordine al *rendimento*.

Una macchina elettrica è da considerarsi in generale un apparecchio destinato a trasformare energia, disponibile sotto forma elettrica o d'altra specie, in energia che viene estrinsecata pure in forma elettrica o d'altra specie, trasformazione la quale non è mai disgiunta da dissipazione di energia, che per lo più si trasforma in calore. Se P_r e P_i sono i valori della potenza resa ed impressa, con chè $P_p = P_i - P_r$ corrisponde alla potenza dissipata, le equazioni:

$$P_r = 0, \quad P_i = 0, \quad P_r - P_i = 0$$

definiscono, per quanto precede, le linee fondamentali della

[1] Si suppone, il che è sempre lecito, che nelle espressioni C e C' siano uguali i coefficienti di $x^2 + y^2$.

potenza resa, della potenza impressa e delle perdite. Ora, la curva:

$$\frac{P_r}{P_i} = \eta,$$

per ogni determinato valore di η, definisce i punti corrispondenti a stati di funzionamento che adducono al valore η del rendimento [1]; ed è chiaro che al variare di η, si ottengono le varie curve di un *fascio*, cui appartengono la curva $P_r = 0$ $(\eta = 0)$, la curva $P_i = 0$ $(\eta = \infty)$ ed anche la curva delle perdite $P_p = 0$ $(\eta = 1)$.

Note queste tre curve del fascio, è subito determinato il valore del parametro η corrispondente ad una curva generica $P\eta$ del fascio stesso. Si ha infatti:

$$\eta = (\eta, 1, 0, \infty)$$

ed il birapporto a secondo membro equivale a quello delle quattro curve $P\eta$, P_p, P_r, P_i.

Nel caso assai frequente nella pratica, in cui il fascio delle curve di eguale rendimento risulta composto di rette o di cerchi, segando, nel primo caso, con una retta, o considerando, nel secondo caso, la punteggiata dei centri [2], la valutazione del rendimento si riduce a quella di un birapporto di punti, riducibile, alla sua volta, ad una ascissa. *(continua)*

[1] Se per $\eta < 1$ la macchina riceve una certa specie di energia da un lato per renderne altra specie da un altro, per $\eta > 1$ essa funzionerà in senso opposto e, posto $\eta' = \frac{1}{\eta}$, η' ne rappresenta il rendimento nel senso ordinario della parola. Se poi $\eta < 0$, la macchina assorbe da ambo i lati energia per far fronte alle perdite e il valore assoluto di η misura il rapporto delle due specie di energia assorbite.

[2] È facile verificare che il birapporto di quattro cerchi di un fascio è uguale a quello dei quattro centri.