
BOLLETTINO UNIONE MATEMATICA ITALIANA

UMI

Sunti di lavori esteri

* Lavori di: H. Bohr

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1,
Vol. 4 (1925), n.5, p. 211–215.

Unione Matematica Italiana

http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1925_1_4_5_211_0

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione
Matematica Italiana, 1925.

SUNTI DI LAVORI ESTERI

I due primi fascicoli del T. 46 dell'« Acta Mathematica », testè comparsi, contengono due importanti lavori. Il primo è una Memoria di 99 pagine, di ROLF NEVANLINNA, e dedicata alla teoria delle funzioni meromorfe; di questo lavoro verrà data un'analisi in un prossimo fascicolo del « Bollettino »; dell'altro, che è una seconda Memoria di HARALD BOHR, di ben 114 pagine, sulle funzioni quasi periodiche, siamo lieti di potere pubblicare fin d'ora un sunto che l'A. stesso ci ha gentilmente favorito, come aveva già fatto per la prima sua Memoria sullo stesso argomento.

H. BOHR (Copenaghen): *L'approssimazione delle funzioni quasi periodiche.*

In un precedente articolo di questo « Bollettino » ⁽¹⁾ ho già riferito sul mio lavoro: *Sulla teoria delle funzioni quasi periodiche*, I, pubblicato nel T. 45 dell'« Acta Mathematica ». Accettando un amichevole invito del Presidente dell'U. M. I., ho l'onore di riferire, nelle seguenti pagine, anche sui risultati principali del successivo lavoro: *Sulla teoria delle funzioni quasi periodiche*, II (« Acta Math. », T. 46) il quale porta il sotto titolo: *Relazione delle funzioni quasi periodiche colle funzioni di infinite variabili; uniforme approssimazione mediante somme trigonometriche.*

Comincio col ricordare la definizione, dalla memoria I:

« Una funzione $f(x)$ continua per $-\infty < x < \infty$ si dirà *quasi periodica*, quando ad ogni $\varepsilon > 0$ corrisponde una lunghezza $l = l(\varepsilon)$ tale che ogni intervallo $x_1 < x < x_2$ di lunghezza $x_2 - x_1 = l$ « contiene almeno un numero di trasporto ⁽²⁾ corrispondente « ad ε , cioè un numero τ per il quale vale, per ogni x , la disuguaglianza

$$|f(x + \tau) - f(x)| < \varepsilon.$$

⁽¹⁾ T. III, p. 220 (1924).

⁽²⁾ V. loc. cit., nota ⁽²⁾ a pag. 221.

Risultato principale della memoria I era il teorema:

« Ad ogni funzione quasi periodica $f(x)$ corrisponde una serie « di FOURIER univocamente determinata

$$\sum A_n e^{i\Lambda_n x},$$

« che dal canto suo determina univocamente la funzione $f(x)$ « converge ad essa in media, il che equivale al sussistere dell'equazione di PARSEVAL:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T |f(x)|^2 dx = \sum |A_n|^2.$$

L'introduzione di una *base* per la successione degli esponenti Λ_n della funzione quasi periodica $f(x)$ costituisce il punto di partenza della Memoria II. Intendo con ciò un aggregato numerabile (o finito) di numeri *linearmente indipendenti*

$$\beta_1, \beta_2, \beta_3, \dots$$

tali che ognuno degli esponenti Λ_n sia esprimibile in un modo, naturalmente unico, come funzione lineare a coefficienti razionali di un numero finito dei numeri β ,

$$(1) \quad \Lambda_n = r_{n,1}\beta_1 + r_{n,2}\beta_2 + \dots + r_{n,\nu_n}\beta_{\nu_n}, \quad (n=1, 2, \dots)$$

Come si può vedere immediatamente, ad ogni successione Λ_n corrisponde una tale base, anzi ne corrispondono infinite. Qui si possono dare due casi:

1. Vi è una *base intera* $\beta_1, \beta_2, \dots$ per la detta successione, cioè una tale base che tutti i coefficienti r della rappresentazione (1) siano numeri interi. Ad esempio, la successione $\Lambda_n = n$ ammette la base (ad un solo termine) $\beta_1 (=1)$, e la successione $\Lambda_n = \log n$ ammette la base (ad infiniti termini) $\log 2, \log 3, \log 5, \dots$.

2. Non vi è alcuna *base intera* per la successione degli esponenti, come è p. es. il caso per $\Lambda_n = \frac{1}{n}$: qui, qualunque sia il numero razionale r , l'aggregato (ad un solo termine) r è una base, ma non è possibile di scegliere r in modo che ogni numero $\frac{1}{n}$ sia un multiplo intero di r .

Per orientarci, consideriamo dapprima il caso di una *base ad un solo termine*. Si trovano allora (col sussidio del teorema di

unicità della memoria I) i teoremi seguenti, assai ovvi al punto di vista formale:

1. « Se la successione Λ_n ammette una base intera ad un termine β , in guisa che ogni esponente Λ_n è un multiplo intero di β , la funzione $f(x)$ è una funzione propriamente periodica di x , col periodo $\frac{2\pi}{\beta}$ ».

2. « Se la successione Λ_n ammette una base β ad un termine (non più però supposto intera) cioè se ogni esponente Λ_n è un multiplo razionale di β , allora la $f(x)$, ch'io ho chiamata *periodica-limite*, è una funzione che per ogni x può essere uniformemente approssimata con funzioni propriamente periodiche (che però non tutte hanno il medesimo periodo) ».

Passiamo poi al caso più generale, di una successione arbitraria di esponenti Λ_n . Anche in questo caso vedremo che tutto si riconduce a funzioni propriamente periodiche o periodiche-limiti; soltanto dobbiamo trasportarci dalla data funzione quasi periodica $f(x)$ di una sola variabile ad una funzione $F(x_1, x_2, \dots)$ di infinite variabili, dove le singole variabili x_m sono coordinate agli elementi β_m della base corrispondente. Introduciamo dapprima nella serie di FOURIER $\sum A_n e^{i\Lambda_n x}$ la espressione (1) degli esponenti Λ_n per mezzo degli elementi β_m della base, cioè

$$\sum A_n e^{i\Lambda_n x} = \sum A_n e^{i(r_{n,1}\beta_1 x + r_{n,2}\beta_2 x + \dots + r_{n,q_n}\beta_{q_n} x)}.$$

Qui, — guidati da un celebre teorema di KRONECKER sulla approssimazione diofantea, secondo il quale le grandezze $\beta_1 x, \beta_2 x, \dots$ si comportano « quasi » fossero grandezze *fra loro indipendenti*, — sostituiamo i prodotti $\beta_1 x, \beta_2 x, \dots$ mediante le variabili libere $x_1, x_2, \dots$, ed otteniamo con ciò, dapprima in modo puramente formale, la serie *ad infinite variabili* $x_1, x_2, \dots$.

$$(2) \quad \sum A_n e^{i(r_{n,1}x_1 + r_{n,2}x_2 + \dots + r_{n,q_n}x_{q_n})}.$$

Questa serie è in generale divergente; essa può però « sommarsi » in modo relativamente semplice. Indichiamone la « somma » con

$$F(x_1, x_2, \dots);$$

la funzione $F(x_1, x_2, \dots)$ così subordinata alla funzione data $f(x)$ si dimostra essere una funzione *totalmente continua* in tutto lo spazio ad infinite dimensioni — $-\infty < x_m < \infty$ ($m = 1, 2, \dots$).

Si dimostra ora con tutta generalità:

1. « Se la base $\{\beta_1, \beta_2, \dots\}$ è *intera*, se cioè i coefficienti r negli esponenti della serie (2) sono numeri interi, allora $F(x_1, x_2, \dots)$ è una funzione *propriamente periodica* delle infinite variabili $x_1, x_2, \dots$ »

2. « Nel caso più generale, quando si tratta di una base $\{\beta_1, \beta_2, \dots\}$ *arbitraria* (cioè non intera), e quindi i coefficienti r sono numeri tutti razionali (ma non interi), la funzione $F(x_1, x_2, \dots)$ si può approssimare uniformemente mediante funzioni propriamente periodiche di infinite variabili, cioè $F(x_1, x_2, \dots)$ è una *funzione periodica-limite* di infinite variabili ».

Con ciò non è difficile di giungere al teorema fondamentale della Memoria II, il quale si enuncia:

Affinchè una funzione $f(x)$ sia quasi periodica, è non solo sufficiente (come è già noto dalla memoria I), ma anche necessario, che essa possa approssimarsi uniformemente in tutto l'intervallo $-\infty < x < \infty$ mediante somme trigonometriche limitate della forma

$$S(x) = \sum_{n=1}^N a_n e^{i\lambda_n x}.$$

Ed infatti, si mostra dapprima che ogni funzione propriamente periodica, e quindi anche ogni funzione $F(x_1, x_2, \dots)$ periodica-limite, può approssimarsi uniformemente in tutto lo spazio ad infinite dimensioni mediante somme trigonometriche limitate della forma

$$S(x_1, \dots, x_m) = \sum_{n_1, \dots, n_m} a_{n_1, \dots, n_m} e^{i(\lambda_{n_1} x_1 + \dots + \lambda_{n_m} x_m)},$$

cioè che per ogni $\varepsilon > 0$ arbitrariamente dato si può trovare una tale somma $S(x_1, \dots, x_m)$, che la disuguaglianza

$$(3) \quad |F(x_1, x_2, \dots) - S(x_1, \dots, x_m)| < \varepsilon$$

sia soddisfatta in tutto lo spazio ad infinite dimensioni.

Si ritorna poi dalla funzione $F(x_1, x_2, \dots)$ alla funzione quasi periodica $f(x)$, introducendo di nuovo $x_1 = \beta_1 x$, $x_2 = \beta_2 x, \dots$; con ciò $F(x_1, x_2, \dots)$ si riduce ad $f(x)$, e $S(x_1, \dots, x_m)$ ad una somma trigonometrica $S(x)$ della sola variabile x , e deduciamo da (3) la disuguaglianza richiesta

$$|f(x) - S(x)| < \varepsilon, \quad (-\infty < x < \infty).$$

Il nostro teorema è manifestamente la generalizzazione naturale del celebre teorema di WEIERSTRASS sulla uniforme ap-

prossimazione delle funzioni $f(x)$ propriamente periodiche mediante somme trigonometriche della forma speciale $\sum a_n e^{inkx}$. Nel caso di una base *intera ad un numero finito di termini*, esso teorema ricade su un teorema di BOHL. A dimostrare però che la classe di funzioni considerata da BOHL coincide con quella sotto classe delle nostre funzioni quasi periodiche la cui successione degli esponenti ammette una base intera finita, è in ogni modo necessaria la deduzione del teorema fondamentale della Memoria I.

(Dall' Autore)

La redazione del « Bollettino » ha ricevuto l'elenco, pubblicato in lingua inglese (Chartres, imprimerie Durand, 1925) ed annotato, dei lavori matematici del prof. NICOLA KRYLOFF, dell'Università di Kiew e presidente della Accademia delle Scienze dell'Ucraina. È una lista di 61 pubblicazioni, riferentesi ad importanti argomenti, quali lo sviluppo di una funzione « arbitraria » in serie precedenti secondo un dato sistema di funzioni fondamentali; gli sviluppi in serie trigonometrica ed i problemi di chiusura; i problemi di minimo e varie generalizzazioni del metodo di RITZ; l'interpolazione e le quadrature meccaniche, ecc. e che dà una larga prova dell'operosità efficace dell'A.