Bollettino
Unione Matematica
Italiana

Giuseppe Belardinelli

Su una equazione alle differenze

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **4** (1925), n.5, p. 200–203.

Unione Matematica Italiana

¡http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1925_1_4_5_200_0¿

Su una equazione alle differenze.

Nota di GIUSEPPE BELARDINELLI

1. In un recente [1] lavoro la sig.na PIA NALLI ha considerato un procedimento di calcolo analogo alla integrazione, deducendone importanti applicazioni alla teoria delle funzioni.

Non mi sembra senza interesse fare qui qualche considerazione relativa ad una estensione nel campo complesso di detto procedimento.

(1) PIA NALLI: *Sopra un procedimento di calcolo analogo alla integrazione*. Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, t. XLVII, 1923.

2. Sia

(1) $$y = \frac{a_1 x + b_1}{c_1 x + d_1}$$

una sostituzione iperbolica fuchsiana avente per cerchio fondamentale il cerchio di centro l'origine e raggio uno: sostituzione che possiamo considerare nella forma canonica

$$\frac{y - \alpha}{y - \beta} = k \frac{x - \alpha}{x - \beta},$$

essendo α e β i punti doppi e k un numero reale positivo e maggiore d'uno.

Porremo per brevità

$$s(x) = \frac{a_1 x + b_1}{c_1 x + d_1};$$

e consideriamo l'equazione alle differenze:

(2) $$\underset{s}{\Delta} F(x) = \frac{F(s(x)) - F(x)}{s(x) - x} = \varphi(x),$$

essendo $\varphi(x)$ una funzione data della variabile complessa x.

Osserviamo, prima di tutto, che la (2) è la generalizzazione della equazione alle differenze

(3) $$\underset{\omega}{\Delta} F(z) = \frac{F(x + \omega) - F(x)}{\omega} = \varphi(x)$$ [1],

nella quale ad $x + \omega$ viene sostituita una speciale sostituzione lineare nel campo complesso.

3. Scriviamo:

$$s^0(x) = x, \quad s^1(x) = s(x),$$

$$s^2(x) = s(s(x)) = \frac{a_2 x + b_2}{c_2 x + d_2}, \ldots, \quad s^n(x) = \frac{a_n x + b_n}{c_n x + d_n}, \ldots$$

e formiamo successivamente le equazioni per $s(x)$, $s^2(x), \ldots, s^n(x)$, cioè:

$$\frac{F(s^k(x)) - F(s^{k-1}(x))}{s^k(x) - s^{k-1}(x)} = \varphi(s^{k-1}(x)), \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots, n)$$

[1] N. E. Nörlund: *Differenzenrechnung*, Teubner, 1924.

sommando avremo:

$$(4)\qquad F(x) - F(s^n(x)) = -\sum_{k=1}^{n} [s^k(x) - s^{k-1}(x)]\varphi(s^{k-1}(x)),$$

e ricercandone il limite per $n \to \infty$, se la serie converge, e ciò dipenderà dalla natura della funzione $\varphi(x)$, avremo che detto limite sarà naturalmente una soluzione della (2).

Supporremo qui che $\varphi(x)$ sia una funzione razionale fratta, e che

$$m_1, \quad m_2, \quad m_3, \dots, \quad m_p,$$

siano i suoi poli.

4. Consideriamo la serie

$$(5)\qquad \sum_{k=1}^{\infty} |s^k(x) - s^{k-1}(x)|,$$

se x è un punto del piano complesso e

$$\dots x_{-2}, \quad x_{-1}, \quad x_0, \quad x_1, \quad x_2 \dots$$

una successione di punti tali che $x_m = s^m(x)$, avremo che x_m tenderà indefinitamente a ζ quando m tende verso $+\infty$, ed ad z quando tende verso $-\infty$.

Per modo che è evidente come la serie (5) sia convergente, ad eccezione dei punti $-\frac{d_n}{c_n}$, trasformati del punto all'∞, risultando la somma di una poligonale minore dell'arco di cerchio $\widehat{x\zeta}$, del cerchio che passa per x, ζ, z.

Tenendo ora presenti le ipotesi fatte sulla $\varphi(x)$, si potrà circondare i punti $s^k(m_n)$, $\begin{pmatrix} k = 0, 1, 2, 3, \dots \\ n = 1, 2, 3, 4, \dots, p \end{pmatrix}$, con cerchi abbastanza piccoli, aventi il centro in questi punti, per modo che per i punti x esterni a questi cerchi si potrà mettere

$$|\varphi(s^k(x))| < M,$$

essendo M un numero abbastanza grande.

La serie (4) sarà convergente assolutamente ed uniformemente in tutto il piano eccetto i punti $-\frac{d_n}{c_n}$ ed i trasformati dei punti $m_1, m_2, \dots, m_p$ mediante le sostituzioni $s^k(x)$.

Per questi valori, potremo dunque dire che il limite della (4) è soluzione della equazione alle differenze (2) e scriveremo

$$F(x) = \underset{\alpha}{\overset{x}{\mathbb{S}}} \varphi(x)\underset{s}{\Delta}(x),$$

generalizzando il simbolo della operazione di *somma* dell'ordinario calcolo delle differenze.

Ma la soluzione non è unica.

Se $f(\xi)$ è una funzione doppiamente periodica avente i periodi $2\pi i$ e $\log k$, la trascendente

$$f\left|\log\frac{x-\alpha}{x-\beta}\right| \tag{6}$$

sarà una funzione fuchsiana che rimane inalterata per le sostituzioni $k^p\dfrac{x-\alpha}{x-\beta}$, ove l'indice p prenderà tutti i valori interi positivi e negativi.

Per avere dunque la soluzione più generale dovremo aggiungere alla (5) la (6) che può anche porsi sotto la forma [1]

$$\Sigma\, k^{mp}\left(\frac{x-\alpha}{x-\beta}\right)^m \theta\left(k^p\frac{x-\alpha}{x-\beta}\right),$$

essendo θ simbolo di funzione razionale, ed m un numero intero positivo maggiore di 1, e la sommatoria estesa a tutti i valori p da $-\infty$ a $+\infty$.

5. Analogamente a quanto la Nalli ha sviluppato nella Memoria richiamata, si potrebbe qui trattare l'applicazione, nel campo della teoria delle funzioni, di questa particolare estensione dell'ordinario procedimento di somma del calcolo delle differenze.

Non solo, ma si potrebbe estendere questa operazione così definita, anzichè per sostituzioni lineari, per funzioni analitiche: occorrerà perciò conoscere l'iterate di dette funzioni, e la serie (4) prenderà allora la forma

$$-\,\Sigma\,[f^k(x) - f^{k-1}(x)]\varphi(f^k(x)),$$

serie più generali ed analoghe a quelle recentemente considerate dal Julia [2].

Jesi, settembre 1925.

(1) H. Poincaré: *Mémoire sur les fonctions fuchsiennes.* Acta Mathematica, 1:3, pag. 286-287.

(2) Comptes Rendus, T. 180, (1° sem. 1925), pag. 563 e pag. 720.