Bollettino
Unione Matematica
Italiana

Enrico Bompiani

Sulla corrispondenza puntuale fra due superficie a punti planari

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **4** (1925), n.5, p. 195–199.

Unione Matematica Italiana

¡http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1925_1_4_5_195_0¿

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 1925.

Sulla corrispondenza puntuale fra due superficie a punti planari.

Nota di ENRICO BOMPIANI

1. Il prof. W. BLASCHKE ha definito [2] nel modo seguente i *sistemi ciclici* di curve sopra una superficie: in ogni punto O della superficie si conduca un cerchio Γ normale alla superficie; il sistema ciclico associato alla congruenza di cerchi è quel sistema ∞^2 di curve tali che i cerchi ad esse osculatori in O incontrino ancora (fuori di O) il cerchio Γ. Questa nozione è invariante rispetto al gruppo conforme dello spazio ed è analoga a quella di *sistema assiale* di curve rispetto al gruppo proiettivo. Per i sistemi ciclici su due superficie in rappresentazione puntuale valgono teoremi analoghi a quelli da me dati per i sistemi assiali [3].

[2] In due Note in corso di stampa: *Sistemi ciclici di curve sopra una superficie* (Rend. R. Acc. dei Lincei); *Über Konforme Geometrie*, IV: *Abbildung zweier Flächen aufeinander* (Abhandlungen des Math. Seminärs, Hamburg, 4, 1925).

[3] *Corrispondenza puntuale fra due superficie* ecc. (Rend. Lincei, 1923). *Proprietà generali della rappresentazione* ecc. (Annali di Matematica, S. 4, t. I, 1923-24). *Sistemi coniugati e sistemi assiali* ecc. (Boll. Unione Matem., 3, 1924).

Già nella Memoria degli Annali avevo notato che per stabilire in modo esauriente le proprietà del 2° ordine delle corrispondenze puntuali fra due superficie occorre uscire dallo spazio ordinario poichè l'intorno superficiale del 2° ordine appartiene in generale ad S_5 e solo in particolare ad S_4 o ad S_3.

Dedico questa Nota ad enunciare alcuni risultati relativi alla corrispondenza fra due superficie a punti planari non parabolici (secondo la locuzione di E. E. LEVI), cioè dotata ciascuna di un doppio sistema coniugato di curve: tali superficie potranno sempre esser supposte in uno S_4 (interessandoci le sole proprietà differenziali del 2° ordine). Da questi teoremi si ricavano come casi particolari quelli sui sistemi assiali e sui sistemi ciclici del BLASCHKE: ed anche con opportune interpretazioni iperspaziali teoremi sulle congruenze di sfere o di cerchi, sulle congruenze rettilinee W, ecc. Le dimostrazioni compariranno in un altro lavoro.

2. In ogni punto O di una superficie σ (di S_4; così sempre nel seguito) sia dato un piano ω non incidente (fuori di O il piano tangente π a σ in O. La congruenza di piani $\{\omega\}$ definisce su σ un sistema ∞^2 di curve con la proprietà seguente: *i piani osculatori in* O *alle curve del sistema incontrano (in rette) il piano* ω. Un tale sistema (che dirò *planare*) è rappresentato su σ da un'equazione differenziale del 2° ordine; la congruenza $\{\omega\}$ si dirà la *congruenza dei piani d'appoggio.*

I. *I piani osculatori alle curve di un sistema planare in* O *formano un cono cubico di cui* ω *è piano direttore doppio e* π *semplice.*

II. *Data una corrispondenza puntuale* [1] *fra due superficie* σ *e* $\bar{\sigma}$ *ad ogni sistema planare di* σ *corrisponde un ben determinato sistema planare su* $\bar{\sigma}$.

Questo teorema stabilisce una differenza essenziale fra le corrispondenze relative a superficie di S_4 (o a punti planari non parabolici) e quelle relative a superficie di S_3.

In ogni punto O di σ (e altrettanto si farà poi per $\bar{\sigma}$) si dia una retta r, per O ma non in π. Fra i sistemi planari si possono considerare quelli i cui piani ω passano per le rette r. Un tal sistema si dirà *subordinato* alla congruenza rettilinea $\{r\}$.

III. *Data una corrispondenza fra* σ *e* $\bar{\sigma}$ *ed una congruenza rettilinea per ciascuna di esse (nel modo ora specificato) esiste in generale uno ed un solo sistema planare di* σ *subordinato ad* $\{$r$\}$ *cui corrisponda un sistema planare di* $\bar{\sigma}$ *subordinato ad* $\{\bar{\text{r}}\}$.

[1] Generalmente biunivoca e soddisfacente alle dovute condizioni di regolarità nelle regioni che si considerano.

Le due congruenze $\{r\}$ ed $\{\bar{r}\}$ sono qui affatto generiche; ma ci si può chiedere se scelta ad arbitrio r per O si può determinare $\bar{r}$ per $\bar{O}$ in modo che il teorema cada in difetto, cioè accada che esista più di un piano ω passante per r cui corrisponda un piano $\bar{\omega}$ per $\bar{r}$. A questa domanda risponde il teorema:

IV. *Data* $\{r\}$ *ad ogni sua retta* r *si possono far corrispondere due fasci di rette* $\bar{r}$ *tali che scelta una coppia* r, $\bar{r}$ *esistono* ∞^1 *piani d'appoggio* ω *per* r *a ciascuno dei quali corrisponde un piano d'appoggio* $\bar{\omega}$ *per* $\bar{r}$.

Facciamo variare anche $\{\bar{r}\}$: si potranno scegliere $\{r\}$ ed $\{\bar{r}\}$ in modo che ad *ogni* sistema planare subordinato da $\{r\}$ su σ corrisponda un sistema planare subordinato da $\{\bar{r}\}$ su $\bar{\sigma}$?

V. *Data una corrispondenza fra due superficie* σ *e* $\bar{\sigma}$, *se non si corrispondono i loro sistemi coniugati, esiste in ogni punto* O *di* σ *una stella di rette* r(∞^2) *e così per ogni punto* $\bar{\mathrm{O}}$ *di* $\bar{\sigma}$ *una stella di rette* $\bar{r}$ *tra loro riferite omograficamente tali che ad ogni sistema planare il cui piano d'appoggio* ω *contenga* r *corrisponde un sistema planare il cui piano* $\bar{\omega}$ *contiene* $\bar{r}$.

VI. *Se invece su* σ *e* $\bar{\sigma}$ *si corrispondono i sistemi coniugati ad ogni retta* r *per* O *corrisponde una ben determinata retta* $\bar{r}$ *per* $\bar{\mathrm{O}}$ *tale che per la coppia* r, $\bar{r}$ *accade il fatto sopra indicato, e le due iperstelle* (∞^3) *di rette sono pure riferite omograficamente.*

La corrispondenza fra i piani d'appoggio in O *e in* $\bar{\mathrm{O}}$ *è in questo caso subordinata dalla stessa omografia precedente.*

3. Teoremi più particolari si ottengono supponendo σ e $\bar{\sigma}$ appartenenti ad una stessa iperquadrica Q (di S_4). Il piano π tangente in O a σ taglia Q lungo due rette; si ha così luogo a considerare su σ il doppio sistema delle curve inviluppate da generatrici della quadrica. Consideriamo l'analogo doppio sistema su $\bar{\sigma}$ e supponiamo che per effetto della corrispondenza fra σ e $\bar{\sigma}$ questi doppi sistemi si corrispondano. Allora i due ultimi teoremi si precisano così:

VII. *Le due stelle di rette corrispondentisi omograficamente in* O *ed* $\bar{\mathrm{O}}$, *a norma del teorema* V, *sono quelle ivi tangenti a* Q; *e quest'omografia è tale che alla polare di* π *in* O *rispetto a* Q *corrisponde in* $\bar{\mathrm{O}}$ *la polare di* $\bar{\pi}$.

Ma se di più si corrispondono su σ *e* $\bar{\sigma}$ *i sistemi coniugati, nell'omografia, data dal teorema* VI, *fra le iperstelle di centri* O *ed* $\bar{\mathrm{O}}$ *si corrispondono gli* S_3 *tangenti in essi a* Q.

4. Passo a dare alcune interpretazioni dei precedenti teoremi nello spazio ordinario.

Sia fissata in S_4 un'ipersfera Ω ed un suo punto. Ad ogni punto di S_4 si faccia corrispondere l'iperpiano polare rispetto ad Ω, e si proietti poi stereograficamente Ω dal punto fissato sopra uno spazio ordinario. In questo al punto di S_4 corrisponde una sfera, ad una retta un cerchio i cui fuochi [1] sono le proiezioni dei punti d'intersezione della retta con Ω. Sicchè i teoremi precedenti si possono interpretare relativamente alle congruenze di sfere. Se in particolare σ e $\bar{\sigma}$ appartengono ad Ω ad esse corrisponderanno due superficie Σ e $\bar{\Sigma}$, e se nelle costruzioni di S_4 non si fa intervenire il centro di proiezione si avranno teoremi della geometria del gruppo conforme [2].

Ad un sistema planare di curve su σ corrisponde su Σ un sistema di curve dotato della seguente proprietà: *I cerchi osculatori in un punto* P *di* Σ *alle curve del sistema incontrano tutti, oltre che in* P, *un cerchio* Γ (che si dirà **cerchio d'appoggio**) *passante per* P (ma non tangente ivi a Σ).

Se questi cerchi d'appoggio si riducono a rette (cioè se i corrispondenti piani ω in S_4 passano per il centro di proiezione) si hanno i « sistemi assiali »; se invece ciascun cerchio Γ è ortogonale nel punto P a Σ (cioè ogni piano ω contiene la polare di π rispetto ad Ω) si hanno i « sistemi ciclici » del BLASCHKE. Riserverò a questi il nome di « sistemi ciclici ortogonali »; e chiamerò « sistemi ciclici » senz'altro quelli introdotti con la precedente definizione (senza richiedere l'ortogonalità di Γ con Σ in P).

Risulta dal teorema I che *i piani osculatori in un punto alle curve di un sistema ciclico inviluppano un cono di terza classe, i loro cerchi osculatori descrivono una superficie del sesto ordine e i loro assi una rigata cubica che ha per direttrice semplice la normale nel punto a* Σ *e per direttrice doppia l'asse del cerchio d'appoggio.*

Per il teorema II *in una trasformazione puntuale fra due superficie ad ogni sistema ciclico corrisponde un tal sistema*; il teorema III (quando per rette r ed $\bar{r}$ si prendano le polari di $\bar{\pi}$ e di π rispetto ad Ω) dà il teorema del BLASCHKE sull'unicità del sistema ciclico ortogonale permanente in una corrispondenza generica fra Σ e $\bar{\Sigma}$; mentre se la corrispondenza è conforme (teo-

[1] Vertici dei coni isotropi contenenti il cerchio.

[2] Tutto ciò è notissimo: si veda p. es. la Memoria, sempre suggestiva, del KLEIN: *Über Liniengeometrie und metrische Geometrie* (Gesam. Math. Abhan. Bd. I, pag. 106-126).

rema VII, ove Q sia la stessa Ω) si conservano tutti i sistemi ciclici ortogonali [1].

Ecco qualche applicazione diversa.

VIII. *Sulle due superficie* Σ *e* $\bar{\Sigma}$ *si corrispondano le linee di curvatura. Si considerino gli* ∞^2 *cerchi* Γ *passanti per* P *su* Σ *e per un qualsiasi punto* A *come cerchi d'appoggio relativi a sistemi ciclici di* Σ*; gli* ∞^2 *cerchi d'appoggio in* $\bar{P}$ *ai sistemi ciclici corrispondenti di* $\bar{\Sigma}$ *passano tutti (per* $\bar{P}$ *e) per un punto* $\bar{A}$.

In particolare se A viene a coincidere con P sulla normale in P a Σ cioè se i sistemi ciclici che si considerano su Σ sono quelli ortogonali del BLASCHKE, ad essi corrispondono su $\bar{\Sigma}$ sistemi ciclici i cui cerchi d'appoggio in $\bar{P}$ passano tutti per un punto $\bar{A}$; ma questo non viene a coincidere con $\bar{P}$ sulla normale ivi a $\bar{\Sigma}$ che se le due superficie sono pure in rappresentazione conforme.

IX. *Sia data una corrispondenza fra i cerchi* C *e* $\bar{C}$ *di due congruenze; sia* F *un fuoco di* C *e* Σ *la superficie da esso descritta (analogamente per* $\bar{C}$*). Esiste in generale uno ed un solo sistema ciclico su* Σ *il cui cerchio d'appoggio in un punto generico* F *contenga anche l'altro fuoco di* C *cui corrisponda un sistema ciclico dotato dell'analoga proprietà su* $\bar{\Sigma}$.

In particolare se $C \equiv \bar{C}$ si ha il teorema:

X. *Data una corrispondenza fra due superficie, esiste su di esse una ed in generale una sola coppia di sistemi ciclici corrispondenti i cui cerchi d'appoggio contengano la coppia di punti corrispondenti per la quale sono costruiti.*