Enea Bortolotti

Su alcune questioni di geometria delle superficie

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **4** (1925), n.5, p. 193–195.
Unione Matematica Italiana
¡http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1925_1_4_5_193_0¿

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 1925.

PICCOLE NOTE

Su alcune questioni di geometria delle superficie (*).

Nota di ENEA BORTOLOTTI

5. Dalle (1), (2) si ricava una notevole espressione della *curvatura totale*, analoga alla nota formula di LIOUVILLE

$$(9)\qquad K = \frac{1}{\sqrt{EG}\,\mathrm{sen}\,\varphi}\left[-\frac{\partial^2\varphi}{\partial u\partial v} + \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\sqrt{G}}{R_{12}}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\sqrt{E}}{R_{21}}\right)\right]\ (^1).$$

Le (1), (2), (9) possono poi risolversi rispetto a $\frac{\partial^2\varphi}{\partial u\partial v}$, $\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}$, $\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}$, ottenendo le formule seguenti:

$$(10)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial^2\varphi}{\partial u\partial v} &= -\frac{\sqrt{EG}}{\mathrm{sen}\,\varphi}\left(K\,\mathrm{sen}^2\varphi + \frac{1}{R^2_{12}} + \frac{1}{R^2_{21}} + \frac{2\cos\varphi}{R_{12}R_{21}}\right) + \\ &\qquad + \sqrt{G}\,\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{R_{12}}\right) + \sqrt{E}\,\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{R_{21}}\right). \\ \frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u} &= -\frac{\sqrt{EG}}{\mathrm{sen}\,\varphi}\left(\frac{1}{R_{12}} + \frac{\cos\varphi}{R_{21}}\right), \qquad \frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v} = -\frac{\sqrt{EG}}{\mathrm{sen}\,\varphi}\left(\frac{1}{R_{21}} + \frac{\cos\varphi}{R_{12}}\right). \end{aligned}\right.$$

(*) Continuazione e fine, v. num. precedente.

(1) Si noti che essendo (*G. D.*, I, pag. 271)

$$\frac{\partial\varphi}{\partial v} = -\frac{\sqrt{EG-F^2}}{G}\left\{\begin{matrix}22\\1\end{matrix}\right\} - \frac{\sqrt{EG-F^2}}{E}\left\{\begin{matrix}12\\2\end{matrix}\right\}$$

si ha

$$\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\sqrt{E}}{R_u}\right) + \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\sqrt{G}}{R_v}\right) + \frac{\partial^2\varphi}{\partial u\partial v} = \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\sqrt{G}}{R_{12}}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\sqrt{E}}{R_{21}}\right) - \frac{\partial^2\varphi}{\partial u\partial v},$$

e questo mostra come la (9) e la formula di LIOUVILLE si possono ricavare l'una dall'altra. Di entrambe si può dare una dimostrazione diretta valendosi di una nota formula (di PÉRÈS) relativa al trasporto, per parallelismo di LEVI CIVITA, di una direzione lungo un circuito chiuso infinitesimale. Basta prendere come circuito il contorno del parallelogramma di vertici $P(u, v)$, $P_1(u+du, v)$ $P_{12}(u+du, v+dv)$, $P_2(u, v+dv)$; e come direzione da trasportare, quella di PP_1, o di PP_2.

Se K, $\frac{1}{R_{12}}$, $\frac{1}{R_{21}}$ sono funzioni note di u, v queste formano un sistema, del tipo iperbolico generalizzato, nelle funzioni incognite φ, $\sqrt{G}$, $\sqrt{E}$.

Dalle note proprietà di questi sistemi deduciamo subito che:

La metrica di una V_2 *può determinarsi assegnando: l'espressione della curvatura totale in funzione di due parametri* u, v, *che su due linee iniziali* $u = u_0$, $v = v_0$ *misurano le lunghezze d'arco: l'angolo secondo cui le linee* u *escono dai punti della linea* $u = u_0$, *e quello secondo cui le linee* v *escono dai punti della linea* $v = v_0$: *infine, le due curvature associate, su* V_2, *al sistema* (u, v).

Per $\frac{1}{R_{12}} = \frac{1}{R_{21}} = 0$ si ha $\frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u} = 0$, $\frac{\partial \sqrt{E}}{\partial v} = 0$; onde possiamo rendere $E = G = 1$: la prima delle (10) prende allora la nota forma $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u \partial v} = - K \operatorname{sen} \varphi$. Si ritrovano così risultati ben conosciuti, relativi alle reti di TCHEBYCHEFF.

6. Terminiamo applicando ad un particolare esempio le considerazioni ora svolte. Proponiamoci di determinare l'elemento lineare delle superficie tali che su di esse si abbia

$$\frac{1}{R_{21}} = 0, \quad \frac{1}{R_{12}} = \sqrt{-K}, \quad \varphi^{(1)} = \varphi^{(2)} = \frac{\pi}{2}, \quad \sqrt{E^{(2)}} = \sqrt{G^{(1)}} = 1, \text{ [1]}$$

con K funzione data *della sola* v.

Il sistema (10), che nel caso attuale si riduce a

$$\begin{gathered} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u \partial v} = \frac{\sqrt{EG}}{\operatorname{sen} \varphi} K \cos^2 \varphi, \quad \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u} = \frac{-\sqrt{-K}}{\operatorname{sen} \varphi} \sqrt{EG}, \\ \frac{\partial \sqrt{E}}{\partial v} = - \frac{\cos \varphi \sqrt{-K}}{\operatorname{sen} \varphi} \sqrt{EG}, \end{gathered} \tag{11}$$

s'integra assai facilmente, nelle condizioni iniziali imposte, col metodo delle *approssimazioni successive*: si trova

$$\sqrt{E} = 1, \quad \sqrt{G} = e^{\frac{u}{R}}, \quad \varphi = \frac{\pi}{2}, \quad \text{essendo} \quad \frac{1}{R^2} = - K.$$

Dunque le superficie cercate hanno l'elemento lineare

$$ds^2 = du^2 + e^{\frac{2u}{R}} dv^2. \tag{12}$$

[1] Qui $\varphi^{(1)} = [\varphi]_{u=u_0}$, $\varphi^{(2)} = [\varphi]_{v=v_0}$, ecc.

Per $K =$ cost. questa è la nota *forma parabolica* dell'elemento lineare pseudosferico. Le linee u sono geodetiche, e anzi il sistema uv appare come una generalizzazione dei sistemi di geodetiche parallele nel senso di LOBACEFSKI ed oricicli ortogonali: come del resto è naturale essendo $\frac{1}{R_v} = \frac{1}{R_{12}} = \frac{1}{R}$.

Precisamente le direzioni delle linee u uscenti da una generica linea v sono, lungo questa, parallele (sulla superficie considerata) nel senso *iperbolico* (secondo la denominazione da me proposta in un lavoro in corso di pubblicazione [1]). Estendendo al parallelismo iperbolico una denominazione introdotta dal BIANCHI pel parallelismo di LEVI-CIVITA, si può dire che *le geodetiche* u *ammettono le linee* v *come trasversali per parallelismo iperbolico.*

Bologna, R. Liceo Galvani, giugno 1925.

(1) *Parallelismo assoluto e vincolato negli* S_3 *a curvatura costante, ed estensione alle* V_3 *qualunque.* Atti dell'Istit. Veneto, anno 1924-25, tomo 84.