UMI

Sunti di lavori esteri

* Lavori di: E. Cartan, J. P. Ballantine, Erans, Th. Varopoulos, Nevanlinna, G. I. Rémoundos, G. Valiron, Angelesco, P. Humbert, P. Appell, N. Obreohkoff, Mandelbrojt, R. Birkeland, N. Obrechkoff, M. Bjernacki, H. Villat, F. H. van den Düngen, P. Sergesco, O-N. Tino, I. Kampé de Fériet, M. Gevrey, L. Pomey, R. Lagrange

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **4** (1925), n.4, p. 170–180.

Unione Matematica Italiana

¡http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1925_1_4_4_170_0¿

SUNTI DI LAVORI ESTERI

E. CARTAN. — *Sur les variétés à connexion affine et la théorie de la relativité généralisée.* (« Annales de l'École Normale Supérieure », 3ème Série, t. XL, 1923, p. 325-412; t. XLI, 1924, p. 1-25; t. XLII, 1925, p. 17-88).

In questa Memoria, mi sono proposto un duplice scopo: esporre ad un punto di vista assai generale l'essenziale della teoria delle varietà o spazî a connessione affine, metrica od euclidea; fare, allo stesso punto di vista, una esposizione comparata della teoria newtoniana e della teoria einsteiniana della gravitazione.

I. La nozione di *connessione affine* è dovuta ad H. WEYL; ridotta alla sua essenza, essa è la nozione di trasporto per parallelismo introdotta da T. LEVI-CIVITA nella teoria degli spazî riemanniani. Nel concetto di WEYL, uno spazio a connessione affine è dunque un continuo in cui viene definita l'equipollenza di due vettori ad origini infinitamente vicine; ma questa definizione non è interamente arbitraria, in quanto WEYL postula, in ogni punto dello spazio, l'esistenza di un sistema di coordinate *geodetiche*, per il quale il trasporto mediante parallelismo di un vettore si traduce analiticamente colla non variazione delle sue componenti. Questo postulato è posto da parte nella mia Memoria: ma non è in ciò che il mio punto di vista differisce da quello di WEYL, ed anche da quello di J. A. SCHOUTEN che, in una Memoria anteriore alla mia — e che del resto non conoscevo — aveva già considerato trasporti per parallelismo assai più generali di quelli di WEYL. L'idea fondamentale da cui ho preso le mosse può essere esposta nel seguente modo [1].

Uno spazio di RIEMANN può riguardarsi come un continuo chiuso di infiniti pezzetti di spazî euclidei. Dati due punti A, A'

[1] Cfr. « C. R. de l'Académie des Sciences, », t. 174, 1922, pp. 437, 593, 734, 857, 1104; « Bulletin des Sc. Math. », t. 48, 1924, pp. 294, 320; Enseign. Math. », 1924-25, pp. 5-18.

infinitamente prossimi di questo spazio e due piccole regioni circondanti questi due punti, la conoscenza del ds^2 dello spazio e quella della *legge di parallelismo* di LEVI-CIVITA permettono d'*integrare* queste due piccole regioni in uno stesso spazio euclideo. Lo spazio riemanniano si può quindi dire a *connessione euclidea*; ciò vuole dire, precisando, che se si attacca mentalmente ad ogni punto dello spazio riemanniano uno spazio euclideo (tangente), si è in possesso di una legge che permette di raccordare in uno solo gli spazî euclidei tangenti in due punti infinitamente vicini. Analiticamente, questa legge sarà nota se, attaccando ad ogni spazio euclideo tangente un triedro T trirettangolo di riferimento, si conosce lo spostamento euclideo infinitesimo che porta a coincidenza i triedri T, T' attaccati ai due punti A, A'.

Il gruppo degli spostamenti euclidei ha l'ufficio fondamentale nella nozione di spazio a connessione euclidea. È il gruppo delle trasformazioni *affini* (o *proiettive*, o *conformi*) che avrà la parte fondamentale nella nozione di spazio a connessione *affine* (o *proiettiva*, o *conforme*). Così pure, il gruppo delle *similitudini* avrà la parte fondamentale nella nozione di spazio a connessione *metrica*. La nozione di trasporto per parallelismo potrà servire all'esposizione della teoria degli spazî a connessione affine, euclidea o metrica; non lo potrà più in quelle degli spazî a connessione proiettiva o conforme (1). Dove essa può essere utilizzata, la nozione di parallelismo è un mezzo; essa non è l'essenziale.

Nel Cap. II della Memoria (t. XL, pp. 359-390), i principî della teoria sono esposti per gli spazî a connessione affine. Ciò che distingue un tale spazio da uno spazio affine propriamente detto, è l'esistenza di uno spostamento affine associato ad un ciclo infinitesimo di origine data A. Questo spostamento può scomporsi in una traslazione ed una rotazione affine di centro A. Nella teoria di WEYL, la traslazione non esiste e la rotazione definisce la *curvatura* dello spazio. Nella mia teoria, la traslazione definisce la *torsione* dello spazio. Esistono notevoli identità (generalizzazione delle identità di BIANCHI), cui soddisfano le componenti della curvatura e della torsione. Esse costituiscono ciò ch'io chiamo «teorema di conservazione della curvatura e della torsione» e sono suscettibili di una interpretazione geometrica semplice e generale: *la somma geometrica degli spostamenti*

(1) Per gli spazî a connessione conforme, v. «Ann. Soc. polon. de Math.», t. 2, 1923, pp. 171-221; per gli spazî a connessione proiettiva, v. «Bulletin de la Soc. Math. de France», t. 52, 1924, pp. 205-241.

infinitesimi associati ai diversi elementi di superficie che limitano un volume piccolissimo a tre dimensioni dello spazio, è nulla. La teoria dei gruppi permette (pagg. 383-390) di rendersi ragione della portata generale di questo teorema.

Il Cap. III (t. XL, pp. 390-403) è dedicato agli spazî a connessione metrica (spazî di WEYL nel caso in cui non vi è torsione) e a connessione euclidea (spazî di RIEMANN nel caso in cui non vi è torsione). Le componenti della curvatura e della torsione permettono la formazione di invarianti integrali attaccati a dominî elementari ad un numero qualunque di dimensioni. Nel caso degli spazî di RIEMANN si può definire così, in due modi diversi, la *curvatura riemanniana* di un elemento a p dimensioni dello spazio; questa curvatura è rappresentata sia da un sistema di p-vettori, liberi od applicati, sia da un sistema di $(n-p)$-vettori, liberi od applicati. A seconda del punto di vista, la somma geometrica delle curvature riemanniane degli elementi fondamentali a p dimensioni che limitano un piccolo dominio a $p+1$ dimensioni è nulla, oppure uguale alla curvatura riemanniana di questo piccolo dominio. Si ha così un nuovo aspetto geometrico delle identità di BIANCHI generalizzate.

Sorvolando sui Cap. IV e V, veniamo al Cap. VI (t. XLII, pp. 18-29) che introduce la nozione di *gruppo di olonomia.* Ai varî cicli che partono da un punto A e vi ritornano, sono associati varî spostamenti i quali formano un gruppo, e tutti i gruppi associati ai varî punti dello spazio sono essenzialmente i medesimi (teorema *d'omogeneità*). Questa è una delle nozioni che appaiono le più feconde [1]. Nel caso delle varietà a connessione affine, indico come si possa trovare il gruppo di olonomia corrispondente e ne dò alcuni esempî. Uno spazio a connessione euclidea può riguardarsi come spazio a connessione affine il cui gruppo di olonomia è il gruppo degli spostamenti euclidei, considerato come sottogruppo del gruppo affine.

I Cap VII e VIII (t. XLII, pp. 29-57) sono dedicati allo studio particolareggiato dei tensori di curvatura e di torsione e alla loro decomposizione in tensori irriducibili. Dò in generale il nome di *tensore* ad un sistema di quantità soggette ad una sostituzione lineare in seguito ad un cambiamento del sistema di riferimento (per trasformazione affine nel caso di spazî a connessione affine, per trasformazione ortogonale nel caso di spazî a connessione metrica). Un tensore ad r componenti è detto *irriducibile*

[1] V. nell'« Enseignement mathématique », loc. cit., una conferenza fatta al Congresso internazionale di Matematiche a Toronto, 1924.

quando non è possibile di trovare $\rho < r$ combinazioni lineari a coefficienti costanti di codeste componenti, che formino esse stesse un tensore. Secondo un teorema generale di cui sospettavo l'esistenza all'epoca della redazione della mia memoria, ma solo recentemente dimostrato da H. WEYL, ogni tensore può essere decomposto in tensori irriducibili quando il gruppo fondamentale è semplice o semisemplice; decomposizione ch'io effettuo compiutamente per i tensori di curvatura e di torsione. Metto in luce l'esistenza, per ognuno di questi tensori irriducibili, di un *polinomio generatore*, la cui stessa forma permette spesso una costruzione geometrica semplice del tensore irriducibile corrispondente.

I Cap. IX e X (t. XLII, p. 57-88) sono particolarmente dedicati alle varietà metriche a tre e quattro dimensioni. Vi determino gl'invarianti integrali scalari, vettoriali o plurivettoriali, i cui coefficienti dipendono linearmente dalle componenti dei tensori di curvatura o di torsione. La determinazione è fatta completamente per le varietà metriche generali a tre dimensioni, come per gli spazî di WEYL e di RIEMANN a quattro dimensioni.

II. Della relatività generalizzata si occupano direttamente i Cap. I (t. XL, pp. 329-359) e IV (t. XLI, pp. 1-25). Essi costituiscono una esposizione comparata delle teorie della gravitazione di NEWTON e di EINSTEIN. Al pari della gravitazione einsteiniana, la gravitazione newtoniana classica può riguardarsi come una manifestazione fisica della curvatura dello spazio-tempo. Basta per ciò riguardare lo spazio-tempo della Meccanica classica come una varietà a quattro dimensioni a connessione affine, il cui gruppo fondamentale è quello di GALILEO. La Meccanica ci dà qui la legge di parallelismo dei vettori d'Universo. Lo *stato* di un punto materiale mobile può rappresentarsi con un vettore d'Universo la cui componente di tempo è la *massa* e la componente di spazio è la *quantità di moto* del punto. Se questo punto non è sottoposto all'azione (diretta) di alcun altro corpo (ed è sottratto ad ogni azione elettrica, ecc.) la convenzione che la sua « quantità di moto-massa » rimane equipollente di mano in mano a sè stessa definisce la connessione affine da attribuirsi allo spazio-tempo affinchè le leggi della gravitazione newtoniana siano *spiegate* nella guisa stessa delle leggi della gravitazione einsteiniana. Si constata allora il fatto notevole che la curvatura dello spazio-tempo, a connessione affine così definita, non fa intervenire che la *variazione* del campo di gravitazione quando si passa da un punto all'altro dello spazio. Ora, si sa che un campo di gravitazione uniforme non può essere svelato da alcuna esperienza meccanica nell'interno di un sistema materiale immerso in questo campo: a questo punto di vista, la *sola curvatura* dello spazio-tempo ha dunque una realtà fisica obiettiva. Questo teorema di meccanica classica aiuta, a quanto mi sembra, ad intendere bene la portata della teoria di EINSTEIN.

Passando dalla gravitazione newtoniana alla einsteiniana, si passa da una varietà il cui gruppo è quello di GALILEO ad una varietà il cui gruppo fondamentale è quello di LORENZ-MINKOWSKI. In entrambi i casi, le leggi della gravitazione traducono proprietà geometriche invarianti della curvatura dello spazio-tempo. Indico come si possa passare quasi automaticamente dalle leggi della gravitazione newtoniana a quella della gravitazione einsteiniana; in particolare, la proprietà del campo di gravitazione newtoniano di essere conservativo è un residuo della proprietà dell'Universo einsteiniano di essere senza torsione.

Questa ultima proprietà, che identifica l'Universo di EINSTEIN ad uno spazio di RIEMANN (con parallelismo di LEVI-CIVITA) è stata presa *a priori* da EINSTEIN come punto di partenza. Qui si pone una importante questione. In fondo, l'idea iniziale del grande fisico, ridotta a quanto essa ha di essenziale, è la possibilità di ridurre tutta la Meccanica al principio d'inerzia, e ciò, col richiedere dall'esperienza una conveniente definizione della connessione affine dello spazio-tempo. Ma la cosa non è altrettanto semplice quanto appare a prima vista, se non viene supposto *a priori* che l'Universo sia senza torsione, poichè i fenomeni meccanici sono compatibili con infinite definizioni possibili di questa connessione affine. L'indeterminatezza si può togliere completamente ammettendo, non già che l'Universo è senza torsione (chè non v'è in questa ipotesi alcuna necessità logica) ma che la torsione scalare di ogni elemento tridimensionale dell'Universo è nulla: ciò conduce ad una concezione *a priori* dello spazio-tempo più larga di quella di EINSTEIN. L'indeterminatezza della connessione affine dell'Universo sparirebbe completamente mediante un concetto più ampio dell'usuale dei mezzi materiali continui, ammettendo, per un elemento materiale, un momento cinetico intorno al proprio centro di gravità che non sia infinitesimo rispetto alla sua quantità di moto: in questo caso, la connessione affine dell'Universo sarebbe interamente del dominio dell'esperienza. Io indico in quale modo, in questa ipotesi, considerazioni geometriche conducono ad una generalizzazione semplice della teoria di EINSTEIN: l'Universo, *nel vuoto*, continua ad essere senza torsione.

Indico infine rapidamente in qual modo la considerazione delle leggi dell'elettromagnetismo potrebbe, fino ad un certo punto, giustificare l'ipotesi, fatta *a priori*, che l'Universo sia senza torsione [1]. *(Dall'Autore).*

***

Nel fascicolo di giugno-luglio 1926 del « American Mathematical Monthly », il sig. J. P. Ballantine, dell'Università Columbia, propone, per la scrittura dei numeri negativi, la cifra rappresentativa di -1, che si potrebbe scrivere ɪ. Così, -7 può scriversi ɪ3; 9,69 -10 si scriverà ɪ,69. Le regole delle numerazioni sono le usuali; quelle delle operazioni non presentano difficoltà. Si notino le identità come

$$\text{ɪ}3 = \text{ɪ}93 = \text{ɪ}9993,$$

che non sono senza relazione col funzionamento delle macchine calcolatrici.

***

Recensioni dei lavori pubblicati nei « Comptes Rendus » de l'Académie des Sciences, T. 177 (2° sem. 1923) *(continuazione e fine).*

Funzioni di variabile complessa. — Erans (Comptes Rendus, T. 177, pag. 241).

Semplifica le ipotesi delle sue note precedenti e di quelle di Bray [2] sulle condizioni necessarie sufficienti che permettono di rappresentare una funzione armonica per mezzo di un integrale di Poisson generalizzato.

— — Th. Varopoulos (*Ibid.*, pag. 306).

Considera una funzione multiforme $u(x)$ avente un numero finito v di rami e che soddisfa ad una equazione della forma:

$$(1) \qquad f(x, u) = u^v + A_1(x)u^{v-1} + \dots + A_v(x) = 0,$$

ove le $A_v(x)$ sono funzioni intere ed enuncia il teorema: « Una « trascendente algebroide qualunque a v rami definita da una

(1) Ad un punto di vista diverso, la torsione dell'Universo è stata utilizzata da J. A. Schouten e, più di recente da H. Eyraud (C. R. T. 176, p. 1605) per giungere ad una sintesi *a priori* della gravitazione e dell'elettromagnetismo, diversa da quella di Weyl.

(2) C. R., T. 176, pag. 1368, 1042.

« equazione algebrica della forma (1) prende nell'intorno del-
« l'infinito tutti i valori salvo tutto al più $v+\lambda+1$, essendo λ « il numero delle relazioni lineari a coefficienti costanti tra le « funzioni $A_i(x)$ »; fa poi delle applicazioni.

Funzioni di variabile complessa. — NEVANLINNA (*Ibid.*, pag. 389).

Le $f(x)$ essendo una funzione analitica della variabile complessa $x=re^{i\varphi}$, meromorfa per $|x|\leq\rho$ ed avente in questo campo gli zero a_1, a_2,...., a_m ed i poli b_1, b_2,...., b_n, l'A. ha ottenuto [1] per $|x|<\rho$ che è:

$$\log f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|f(\rho e^{i\vartheta})|\frac{\rho e^{\vartheta i}+x}{\rho e^{i\vartheta}-x}d\vartheta -$$

$$-\sum_1^m\log\frac{\rho^2-\bar{a}_v x}{\rho(x-a_v)}+\sum_1\log\frac{\rho^2-\bar{b}_v}{\rho(x-b_v)}+iC,$$

ove $\bar{a}_v$ e $\bar{b}_v$ sono coniugati dei numeri a_v e b_v e C una costante reale.

— — G. I. RÉMOUNDOS (*Ibid.*, pag. 524).

Mostra come i risultati ottenuti da VAROPOULOS [2] possono considerarsi come un' applicazione di una proprietà più generale dell' eliminazione [3].

— — G. VALIRON (*Ibid.*, pag. 740).

Completa, in seguito alla nota di MILLOUX [4] relativa alla distribuzione degli zeri delle funzioni $\varphi(z)-a$ (essendo $\varphi(z)$ una funzione meromorfa ammettente valore asintotico), i suoi risultati [5] ed enuncia il teorema: « se $f(z)$ è una funzione d'ordine finito, $n(x, a)$ il numero degli zero di $f(z)-a$ il cui modulo è al

(1) Ueber die Eigenschaften analytischer Funktionen in der Umgebung einer singulären Stelle oder Linie, Acta Soc. Scient. Fennicae, 1922, pag. 7.

(2) VAROPOULOS, Thèse de doctorat, 1923, Paris; C. R., T. 199, pag. 306.

(3) Thèse de doctorat, 1806, Paris; Sur le zéros d'une classe de fonctions trascendantes, Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse, 2 serie, T. 8, 1916.

(4) C. R., T. 176, pag. 1535.

(5) Annales École Normale, 1922.

più uguale ad x, ad ogni numero k dato superiore ad 1 si può far corrispondere un numero positivo H tale che l'ineguaglianza:

$$\int_0^r n(x, a)\frac{dx}{x} > H \log M\left(\frac{r}{k}\right),$$

sia verificata a partire da un valore $r(a)$ di r, salvo per dei valori di a formanti nel piano delle a un insieme di misura nulla.

Funzioni di variabile complessa. — ANGELESCO (*Ibid.*, pag. 861).

Rappresenta mediante serie e mediante integrali definiti le funzioni generatrici dei polinomi di HERMITE

$$U_n = e^{\frac{x^2}{2}} \frac{d^n e^{-\frac{x^2}{2}}}{dx^n},$$

ed esprime gli integrali dell'equazione $r - px + qy = 0$ per mezzo delle funzioni armoniche.

— — P. HUMBERT (*Ibid.*, pag. 1092).

Studia alcune serie che derivano dalla funzione ipergeometrica d'ordine superiore introdotta da CLAUSEN e GOURSAT.

— — P. APPELL (*Ibid.*, pag. 1165).

Fa conoscere delle formule ove figurano la costante di EULERO, la serie Σn^{-k} e diversi integrali definiti che dipendono mediante derivazione dalla funzione Γ.

— — N. OBRECHKOFF (*Ibid.*, pag. 1190).

Indica delle condizioni sufficienti mediante le quali si può sviluppare una funzione $f(x)$ regolare entro un'area (D) semplicemente connessa, in serie della forma $\Sigma a_n f_n(x)$, ove le $f_n(x)$ sono regolari in (D) e continue sul contorno.

— — MANDELBROJT (*Ibid.*, pag. 1271).

Mostra che una funzione analitica $\Sigma a_n x^n$ è definita, a meno d'una funzione intera, dalla successione parziale dei coefficienti $a_{n_i}, a_{n_i+k_i}, \ldots,$ la successione dei n_i essendo qualunque ed i k_i tali che $\lim\limits_{i=\infty} \frac{k_i}{n_i} = \infty$; enuncia dei risultati analoghi e l'indicazione dei casi ove la serie ammette il suo cerchio di convergenza come linea singolare essenziale.

Equazioni algebriche. — R. BIRKELAND (Comptes Rendus, T. 177, pag. 23).

Fa seguito ai suoi lavori riguardanti la risoluzione delle equazioni algebriche, ponendoli in confronto con quelli di G. BELARDINELLI.

— — N. OBRECHKOFF (*Ibid.*, T. 177, pag. 102).

LAGUERRE ha posto (1) la questione di generalizzare la regola dei segni di Cartesio per le radici complesse delle equazioni algebriche, l'autore dimostra che: « Se $f(x)=0$ è una equazione algebrica a coefficienti reali, il cui numero delle variazioni di segno è v, il numero delle sue radici aventi gli argomenti compresi fra $-\alpha$ ed α $\left(0 \leq \alpha < \frac{\pi}{2}\right)$, i limiti α essendo esclusi, non supera $v+2\left[\frac{n\alpha}{\pi}\right]$, ove $[x]$ indica il massimo intero contenuto in x, e se è minore, la differenza è un numero pari.

— — M. BIERNACKI (*Ibid.*, pag. 1193).

Conformemente ai risultati anteriori di MONTEL (2), mediante un procedimento algebrico trova che l'equazione

$$1+x^p+ax^n=0 \qquad (p<n)$$

ha sempre p radici il cui modulo non supera un limite indipendente da a, e trova che questo limite è ugnale a $\sqrt[p]{\frac{n}{n-p}}$; mostra che esso non è raggiunto che in casi molto determinati ed indica diverse generalizzazioni.

Equazioni differenziali ed integrali. — H. VILLAT (Comptes Rendus, T. 177, pag. 11).

Richiama l'attenzione su una sua nota (3) riguardante certe equazioni integrali che s'incontrano in problemi di fisica-mate-

(1) C. R., 1874; Oeuvres, T. I, p. 50.
(2) Annales de l'École Normale sup., 3a serie, T. 40, 1923, pag. 1-34.
(3) C. R., T. 173.

matica, in questa nota indica una nuova equazione e la soluzione di un problema di idrodinamica.

Equazioni differenziali ed integrali. — F. H. VAN DEN DUNGEN (*Ibid.*, pag. 243, 387, 574, 677).

Tratta in queste note di alcune applicazioni tecniche delle equazioni integrali, in special modo a dei problemi riguardanti gli ingegneri; esamina come si possa utilizzare il metodo delle approssimazioni successive di PICARD per la determinazione dei numeri fondamentali, deducendone delle formule sperimentali. Nell'ultima nota tratta delle equazioni integrali a più parametri e delle loro applicazioni tecniche.

— — P. SERGESCO (*Ibid.*, pag. 519).

Studia la distribuzione dei valori caratteristici dei nuclei di MARTY [1] $N(x, y) = A(z)K(x, y)$, ove $A(x) < 1$, e $K(x, y)$ è un nucleo simmetrico positivo, ed enuncia un teorema che è la generalizzazione di un teorema di WEYL [2].

— — O-N. TINO (*Ibid.*, pag. 525).

Mediante la classe dei nuclei studiati da LALESCO [3] e ANGHELUTZA [4] $K(x, y) \equiv -K(y, x)$ intermedi tra quelli simmetrici e non simmetrici, mette in evidenza il passaggio delle funzioni fondamentali di FREDHOLM alle funzioni fondamentali di SCHMIDT.

— — I. KAMPÉ DE FÉRIET (*Ibid.*, pag. 546).

Continua le sue note interessantissime [5] sui sistemi di equazioni alle derivate parziali delle funzioni ipergeometriche di due variabili.

— — M. GEVREY (*Ibid.*, pag. 571).

Tratta della formazione ed impiego della funzione di GREEN sulla integrazione delle equazioni lineari alle derivate parziali d'ordine qualunque a caratteristica immaginaria [6].

(1) C. R., T. 150, (1910), pag. 603.
(2) Math. Annalen, T. 71, (1912), pag. 443.
(3) C. R., T. 151, (1910), pag. 1336.
(4) C. R., T. 158, (1914), pag. 243.
(5) C. R., T. 172, pag. 1634; C. R., T. 173, pag. 283, 401, 489, 900.
(6) C. R., T. 171, (1420), pag. 610, 839; T. 176, (1923), pag. 761, 1445.

Equazioni differenziali ed integrali. — L. Pomey (*Ibid.*, pag. 1094).

Mostra come si possano sviluppare in serie di funzioni, assolutamente ed uniformemente convergenti, le soluzioni delle equazioni integro-differenziali lineari se l'indice d'integrazione è superiore all'ordine massimo della derivazione.

— — R. Lagrange (*Ibid.*, pag. 1096).

Essendo dati due sistemi d'equazioni differenziali lineari di ordine n, d'integrali generali

$$x_i = \sum_{h=1}^{n} \alpha_h x_{hi} \quad \text{e} \quad X_i = \sum_{h=1}^{n} \lambda_h \chi_{hi},$$

si dice che sono aggiunti se esiste una espressione a coefficienti costanti bilineare rispetto ai due sistemi d'integrali, il cui valore sia indipendente t, dimostra che se due sistemi lineari sono tali che esiste una espressione analitica

$$\Phi(x_1, x_2, x_3 \dots x_n, \chi_1, \chi_2, \dots, \chi_n)$$

il cui valore sia indipendente da t, essi sono in generale del medesimo ordine ed aggiunti. *g. b.*