BOLLETTINO
UNIONE MATEMATICA
ITALIANA

ENEA BORTOLOTTI

Su alcune questioni di geometria delle superficie

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **4** (1925), n.4, p. 162–166.

Unione Matematica Italiana

¡http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1925_1_4_4_162_0¿

Su alcune questioni di geometria delle superficie.

Nota di ENEA BORTOLOTTI

Ho mostrato, in un lavoro in corso di pubblicazione [1], come possano riuscire utili, nello studio dei sistemi di linee di una superficie, le nozioni di *curvatura associata* e di *direzioni associate* a una serie Σ_ξ di direzioni (ξ) uscenti dai punti di una curva Γ: nozioni introdotte recentemente, per le Σ_ξ in V_n, dal BIANCHI [2], e che possono servir di base per estendere alle Σ_ξ in V_n molti notevoli risultati della teoria delle curve: in particolare le formule di FRÉNET, e il teorema di esistenza e unicità che da queste si deduce. Indicherò qui alcuni risultati di Geometria delle superficie che ho ottenuto valendomi appunto di tali nozioni.

1. Sia Σ_ξ una serie di vettori $\xi(s)$, tangenti a una superficie σ nei punti di una curva Γ, di cui s è l'arco. Se indichiamo con δ il simbolo di differenziazione covariante in σ, $\eta = \text{vers}\,\frac{\delta\xi}{\delta s}$ ed $\frac{1}{R} = \text{mod}\,\frac{\delta\xi}{\delta s}$ sono il *vettore associato* e la *curvatura associata* a Σ_ξ nel punto generico di Γ.

(1) *Su di una generalizzazione della teoria delle curve e sui sistemi coniugati di una* V_2 *in* V_n. (Rend. dell'Ist. Lombardo, s. 2ª, vol. 58, 1925).

(2) BIANCHI: *Sul parallelismo vincolato di Levi-Civita nella metrica degli spazi curvi.* (Rend. dell'Accad. di Napoli, s. 3ª, vol. 28, 1922, pag. 150-171).

Stabiliamo in σ un sistema di coordinate curvilinee (u, v); indichiamo con $\frac{1}{R_{12}}$, $\left[\frac{1}{R_{21}}\right]$ la curvatura associata alla serie di direzioni delle linee u ($v =$ cost.) che escono dai punti della generica linea v ($u =$ cost.) [o, rispettivamente, alla serie di direzioni delle linee v che escono dalla generica linea u]. Si trova subito che *a meno del segno*, si ha

$$\frac{1}{R_{12}} = -\frac{\sqrt{EG-F^2}}{E\sqrt{G}}\begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix} = -\begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix}\frac{\operatorname{sen}\varphi}{\sqrt{E}}, \tag{1}$$

$$\frac{1}{R_{21}} = -\frac{\sqrt{EG-F^2}}{G\sqrt{E}}\begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix} = -\begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix}\frac{\operatorname{sen}\varphi}{\sqrt{G}}, \tag{2}$$

ove φ è l'angolo delle linee coordinate, e i simboli di CHRISTOFFEL s'intendono costruiti rispetto al ds^2 di σ.

Per $\varphi = \frac{\pi}{2}$ dalle (1), (2) si ha

$$\frac{1}{R_{12}} = -\frac{1}{\sqrt{EG}}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}, \quad \frac{1}{R_{21}} = -\frac{1}{\sqrt{EG}}\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial u},$$

ossia le espressioni (1), (2), di $\frac{1}{R_{12}}$, $\frac{1}{R_{21}}$ si riducono — come è, geometricamente, ben prevedibile — a quelle, ben note, delle curvature geodetiche $\frac{1}{R_v}$, $\frac{1}{R_u}$ delle linee coordinate v, u (*G. D.* [1], I, pag. 267). Considereremo le (1), (2) vere anche nel segno, venendo così ad assegnare un segno ad $\frac{1}{R_{12}}$, $\frac{1}{R_{21}}$.

2. Prendiamo, per le linee u, quali trasversali, anzichè le linee v, un sistema qualunque di linee $\varphi(u, v) =$ cost.: detta $\frac{1}{R_{1\varphi}}$ la curvatura associata alla serie di direzioni delle linee u che escono dalla linea $\varphi =$ cost. generica, troviamo

$$\frac{1}{R_{1\varphi}} = \frac{\begin{Bmatrix}11\\2\end{Bmatrix}\frac{\partial\varphi}{\partial v} - \begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix}\frac{\partial\varphi}{\partial u}}{E\sqrt{\Delta_1\varphi}}. \tag{3}$$

[1] Così citerò, d'ora innanzi, la *Geometria Differenziale* del BIANCHI (3ª ediz.).

Per $\varphi = u$ da questa si ha la (1), per $\varphi = v$, la nota espressione di $\frac{1}{R_u}$. La (3) permette di risolvere la seguente questione:

Esistono, in generale, su di una superficie dei sistemi di linee tali che la curvatura associata alla serie delle direzioni delle linee del sistema uscenti dai punti di una trasversale, sia indipendente (in ciascun punto) ***dalla trasversale scelta?***

Supponiamo che esista un tale sistema, e che le sue linee siano assunte come linee u: basterà scrivere che è $\frac{1}{R_{1\varphi}} = \frac{1}{R_{12}}$ indipendentemente dalla natura della funzione $\varphi(u, v)$. Troviamo facilmente che per questo deve essere $\left\{ \begin{matrix} 11 \\ 2 \end{matrix} \right\} = 0$, $\left\{ \begin{matrix} 12 \\ 2 \end{matrix} \right\} = 0$, onde $\frac{1}{R_{1\varphi}} = 0$ per ogni φ, e inoltre, detta K la curvatura assoluta della superficie, $K = 0$. Dunque l'unico caso di indipendenza dalla trasversale è quello già noto: in cui *la superficie è a metrica euclidea, e le linee* u *supposte sono parallele* (nel senso di LEVI-CIVITA).

3. Veniamo ora ad indicare un altro risultato di assai più vasta portata. È evidente l'analogia — notata esplicitamente anche dal BIANCHI (*G. D.*, I, 371 e seg.) — tra i risultati del SERVANT relativi all'esistenza e unicità delle reti di TCHEBYCHEF e quelli del DARBOUX sulle *asintotiche virtuali*. Vien naturale la domanda se tali risultati non discendano come casi particolari da uno stesso teorema più generale.

A questa domanda si risponde affermativamente col *teorema* seguente:

Una qualunque superficie (o meglio una sua porzione opportunamente limitata) ***può, in infiniti modi, rivestirsi con una rete di linee*** α, β, ***tali che lungo esse le curvature*** $\frac{1}{\mathrm{R}_{12}}$, $\frac{1}{\mathrm{R}_{21}}$ ***associate alle direzioni delle linee di un sistema che escono dai punti di una linea dell'altro siano due funzioni arbitrariamente assegnate*** [1] ***del punto della superficie: e una di queste reti è individuata assegnandone ad arbitrio due linee iniziali che si incrocino*** (senza toccarsi) ***in un punto.***

In effetto: le (1), (2) ci dicono che i reticoli coordinati pei quali le curvature associate sono due funzioni assegnate $\frac{1}{R_{12}}$, $\frac{1}{R_{21}}$,

[1] Soddisfacenti alle ordinarie condizioni di continuità e derivabilità.

sono caratterizzati dalle due condizioni:

$$\left\{ {12 \atop 2} \right\} = \frac{-E\sqrt{G}}{\sqrt{EG-F^2}} \cdot \frac{1}{R_{12}}, \quad \left\{ {12 \atop 1} \right\} = \frac{-G\sqrt{E}}{\sqrt{EG-F^2}} \cdot \frac{1}{R_{21}}. \tag{4}$$

Dunque: se (u, v) è un sistema coordinato qualunque, e vogliamo ottenere una trasformazione di coordinate $u = u(\alpha, \beta)$, $v = v(\alpha, \beta)$, tale che la nuova rete coordinata abbia le curvature associate $\frac{1}{R_{12}(u, v)}, \frac{1}{R_{21}(u, v)}$ assegnate, sarà necessario e sufficiente prendere per $u(\alpha, \beta)$, $v(\alpha, \beta)$ due funzioni tali che risulti

$$\begin{aligned} \left\{ {12 \atop 2} \right\}' &= \frac{-E'\sqrt{G'}}{\sqrt{E'G'-F'^2}} \cdot \frac{1}{R_{12}} = F_1\left(u, v, \frac{\partial u}{\partial \alpha}, \frac{\partial u}{\partial \beta}, \frac{\partial v}{\partial \alpha}, \frac{\partial v}{\partial \beta}\right) \\ \left\{ {12 \atop 1} \right\}' &= \frac{-G'\sqrt{E'}}{\sqrt{E'G'-F'^2}} \cdot \frac{1}{R_{21}} = F_2\left(u, v, \frac{\partial u}{\partial \alpha}, \frac{\partial u}{\partial \beta}, \frac{\partial v}{\partial \alpha}, \frac{\partial v}{\partial \beta}\right) \end{aligned} \tag{5}$$

ove gli apici distinguono gli elementi relativi alle coordinate α, β, ed F_1, F_2 indicano due *funzioni note* degli argomenti indicati [1].

Ora se sostituiamo ai simboli $\left\{ {12 \atop 1} \right\}'$, $\left\{ {12 \atop 2} \right\}'$ le loro espressioni (5) nelle note formule di CHRISTOFFEL (*G. D.*, I, pag. 81, 156) esprimenti le derivate seconde $\frac{\partial^2 u}{\partial\alpha\partial\beta}, \frac{\partial^2 v}{\partial\alpha\partial\beta}$ per le derivate prime di $u(\alpha, \beta)$, $v(\alpha, \beta)$, otteniamo un sistema del tipo *iperbolico*

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial\alpha\partial\beta} + \left\{ {11 \atop 1} \right\} \frac{\partial u}{\partial \alpha}\frac{\partial u}{\partial \beta} + \left\{ {12 \atop 1} \right\} \left(\frac{\partial u}{\partial \alpha}\frac{\partial v}{\partial \beta} + \frac{\partial u}{\partial \beta}\frac{\partial v}{\partial \alpha}\right) + \left\{ {22 \atop 1} \right\} \frac{\partial v}{\partial \alpha}\frac{\partial v}{\partial \beta} &= F_1 \frac{\partial u}{\partial \alpha} + F_2 \frac{\partial u}{\partial \beta} \\ \frac{\partial^2 v}{\partial\alpha\partial\beta} + \left\{ {11 \atop 2} \right\} \frac{\partial u}{\partial \alpha}\frac{\partial u}{\partial \beta} + \left\{ {12 \atop 2} \right\} \left(\frac{\partial u}{\partial \alpha}\frac{\partial v}{\partial \beta} + \frac{\partial u}{\partial \beta}\frac{\partial v}{\partial \alpha}\right) + \left\{ {22 \atop 2} \right\} \frac{\partial v}{\partial \alpha}\frac{\partial v}{\partial \beta} &= F_1 \frac{\partial v}{\partial \alpha} + F_2 \frac{\partial v}{\partial \beta} \end{aligned} \right. \tag{6}$$

al quale $u(\alpha, \beta)$, $v(\alpha, \beta)$ debbono soddisfare. Viceversa, se $u(\alpha, \beta)$, $v(\alpha, \beta)$ sono due qualunque soluzioni indipendenti del sistema (6), dal confronto delle (6) con le formule di CHRISTOFFEL corrispondenti consegue che $\left\{ {12 \atop 1} \right\}'$, $\left\{ {12 \atop 2} \right\}'$ soddisfano alle (5), e quindi che le linee (α, β) soddisfano alle condizioni imposte.

[1] Potremmo anche assegnare $\frac{1}{R_{12}}, \frac{1}{R_{21}}$ come funzioni di α, β, e allora tra gli argomenti di F_1, F_2 figurerebbero anche, in modo esplicito, le variabili indipendenti α, β.

Ciò posto, dai noti teoremi sui sistemi del tipo iperbolico segue senz'altro quanto avevamo enunciato.

Questo risultato era geometricamente prevedibile: in effetto si vede subito come si possa rivestire, con successive costruzioni infinitesimali, una qualunque superficie con una rete (α, β) che goda delle proprietà poco sopra indicate.

La proprietà dimostrata permette di considerare, in certo qual modo, come *intrinsecamente definito* su di una superficie un doppio sistema di linee, *mediante le due curvature associate* ad esso relative.

Se $\frac{1}{R_{12}} = 0$, $\frac{1}{R_{21}} = 0$, ritroviamo i noti risultati relativi alle reti di TCHEBYCHEF.

4. E vediamo facilmente come anche i risultati di DARBOUX per le *asintotiche virtuali* rientrino in quello ora esposto.

Infatti stabiliamo un sistema di coordinate curvilinee in V_3, prendendo come superficie $u_3 = 0$ una data superficie σ: su questa come linee $u_1 u_2$ le asintotiche; e le linee u_3 normali alla superficie stessa. Tenendo conto delle formule di CODAZZI troviamo che le curvature associate al sistema $(u_1 u_2)$ su σ sono

$$(7)\qquad \begin{aligned} \frac{1}{R_{12}} &= \frac{\operatorname{sen}\varphi}{2\sqrt{a_{11}}}\left(\frac{\partial \log R}{\partial u_1} + \frac{(13,21)_a}{\omega_{12}\sqrt{a_{33}}}\right) \\ \frac{1}{R_{21}} &= \frac{\operatorname{sen}\varphi}{2\sqrt{a_{22}}}\left(\frac{\partial \log R}{\partial u_2} + \frac{(23,12)_a}{\omega_{12}\sqrt{a_{33}}}\right) \end{aligned}$$

ove le a_{ik} e i simboli di RIEMANN si riferiscono alla metrica di V_3: φ è l'angolo delle asintotiche, $K_r = -\frac{1}{R^2}$ è la curvatura relativa di σ in V_3 ed ω_{ik} sono i coefficienti della seconda forma fondamentale (del 2° grado) della V_2 in V_3.

Se la V_3 è a *curvatura costante*, dalle (7) abbiamo

$$(8)\qquad \frac{1}{R_{12}} = \frac{\operatorname{sen}\varphi}{2}\frac{\partial \log R}{\partial s_{u_1}}, \quad \frac{1}{R_{21}} = \frac{\operatorname{sen}\varphi}{2}\frac{\partial \log R}{\partial s_{u_2}}$$

ove s_{u_1}, s_{u_2} sono le lunghezze d'arco delle linee u_1, u_2.

Queste formule *caratterizzano intrinsecamente* sulle V_2 in V_3 a curvatura costante *i sistemi di asintotiche virtuali.*

Naturalmente le (8) non differiscono sostanzialmente dalle usuali condizioni per le asintotiche virtuali in V_3 euclidee (*G. D.*, I, pag. 371): anzi è immediata la deduzione delle une dalle altre.

Ponendo nelle (5) al luogo di $\frac{1}{R_{12}}$, $\frac{1}{R_{21}}$ le espressioni (8) abbiamo i noti risultati di DARBOUX. *(continua)*