Silvio Minetti

Sulla teoria delle serie divergenti sommabili del Borel

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **4** (1925), n.4, p. 153–155.

Unione Matematica Italiana

¡http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1925_1_4_4_153_0¿

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 1925.

Sulla teoria delle serie divergenti sommabili del Borel.

Nota di SILVIO MINETTI

1. Nel volume *Leçons sur les séries divergentes*, cap. III « Théorie des séries sommables » del BOREL, si trovano alcune proposizioni e conclusioni che sono state oggetto di rettifica e generalizzazione specie da parte dell'HARDY (¹) del SANNIA (²) e del NICOLETTI (³), e relativamente alle quali ero stato condotto a stabilire alcuni risultati che poi un più accurato esame bibliografico della questione mi fece constatare essere stati già trovati dai predetti Autori.

Mancando però esempi concreti che pongano in difetto le proposizioni di cui in parola, per lo meno aventi la forma della funzione sotto il segno $\int$ che adopera il BOREL nella Memoria fondamentale (⁴) che dette origine alla sua teoria, non credo del tutto privo di interesse di segnalarne qui uno semplicissimo, che avevo trovato nel corso delle mie ricerche fatte sull'argomento stesso.

2. Per maggior uniformità, uso qui le stesse notazioni adoperate dal BOREL nella sua Memoria fondamentale citata del 1896.

Le ipotesi da cui parte il BOREL sono le seguenti:

1) $\varphi(a) = e^{-a}x(a)$ ammette un limite per $a \rightarrow \infty$;
2) $x(a)$ è funzione intera;
3) l'integrale

$$\int_0^\infty [e^{-a}x'(a) - e^{-a}x(a)]da$$

è convergente.

La tesi ammessa dal BOREL è che

$$\lim_{a \rightarrow \infty} [e^{-a}x'(a) - e^{-a}x(a)] = 0.$$

(¹) G. H. HARDY. Quarterly Journal of Mathematics, vol. XXXV, 1904, pp. 22-58.

(²) Rendiconti Circolo Matematico di Palermo, 1907.

(³) *Sull'integrazione per parti fra limiti infiniti*, Rend. Acc. dei Lincei, Serie V, vol. XXXI, 1922, II sem.

(⁴) Journal de Mathématiques, Vme série, Tome deuxième, 1896.

Ora si prenda

$$x(a) = \frac{e^a \operatorname{sen} a^2}{2a}$$

per $a \neq 0$ e $x(a) = 0$, per $a = 0$.

Osserviamo innanzi tutto che

$$\varphi(a) = e^{-a} x(a) = \frac{\operatorname{sen} a^2}{2a}$$

tende per $a \to \infty$ ad un limite; e precisamente si ha

$$\lim e^{-a} x(a) = \lim_{a \to \infty} \frac{\operatorname{sen} a^2}{2a} = 0.$$

Inoltre $x(a)$ è funzione intera; invero, data la forma della nostra funzione, l'unico dubbio che potrebbe sorgere sarebbe per $a = 0$, ma lo sviluppo in serie di potenze di a mostra immediatamente che $a = 0$ è punto regolare.

Inoltre si ha

$$\int_0^\infty [e^{-a} x'(a) - e^{-a} x(a)] da = \int_0^\infty \left[\left(\cos a^2 + \frac{\operatorname{sen} a^2}{2a} - \frac{\operatorname{sen} a^2}{2a^2}\right) - \frac{\operatorname{sen} a^2}{2a}\right] da =$$

$$= \int_0^\infty \left[\cos a^2 - \frac{\operatorname{sen} a^2}{2a^2}\right] da = \int_0^\infty \cos a^2 da - \int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} a^2}{2a^2} da.$$

Ora il primo integrale dell'ultimo membro è convergente, poichè con la trasformazione $a^2 = y$, esso diventa

$$\int_0^\infty \frac{\cos y}{2\sqrt{y}} dy$$

e la funzione sotto il segno si presenta quindi sotto la forma di un prodotto di una funzione positiva decrescente e tendente a zero per $y \to \infty$, per un'altra per cui l'integrale esteso fra due limiti qualsivoglia si mantiene sempre finito.

Analogamente

$$\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} a^2}{2a^2} da$$

è pure convergente, perchè con la stessa trasformazione si muta in altro per il quale si potrebbero ripetere le stesse considerazioni che abbiam fatte per il primo.

Si vede dunque che nel nostro caso, e cioè per $x(a) = \frac{e^a \operatorname{sen} a^2}{2a}$ l'integrale

$$\int_0^\infty [e^{-a}x'(a) - e^{-a}x(a)]da$$

è convergente.

D'altra parte però è agevole mostrare come il

$$\lim_{a \to \infty} [e^{-a}x'(a) - e^{-a}x(a)]$$

non solo non è zero, ma non esiste.

Si ha infatti

$$\lim_{a \to \infty} \left[e^{-a} \left(\frac{e^a \operatorname{sen} a^2}{2a} \right)' - e^{-a} \frac{e^a \operatorname{sen} a^2}{2a} \right] = \lim_{a \to \infty} \left[\cos a^2 - \frac{1}{2} \frac{\operatorname{sen} a^2}{a^2} \right]$$

e mentre il secondo termine entro parentesi del secondo membro tende a zero per $a \to \infty$, il primo non ha evidentemente limite.

Fermo, R. Istituto Industriale.