
BOLLETTINO UNIONE MATEMATICA ITALIANA

GIULIO BISCONCINI

**Studio del moto incipiente di una
trave pesante appoggiata su di un
piano orizzontale scabro e
sollecitata ad un estremo**

*Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1,
Vol. 4 (1925), n.4, p. 145–150.*

Unione Matematica Italiana

[http:
//www.bdim.eu/item?id=BUMI_1925_1_4_4_145_0](http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1925_1_4_4_145_0)

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione
Matematica Italiana, 1925.

PICCOLE NOTE

Studio del moto incipiente di una trave pesante appoggiata su di un piano orizzontale scabro e sollecitata ad un estremo (*).

Nota di GIULIO BISCONCINI

5. Perchè l'atto iniziale di moto sia rotatorio intorno ad A , oltre alle (3) bisogna che sia inizialmente

$$(8) \quad \ddot{x} = 0, \quad \ddot{\alpha} > 0.$$

Dev'essere inoltre $M = 0$, perchè nell'istante iniziale solo A risulta appoggiato, e inoltre si avrà $-T \leq fN$ perchè la reazione in A è interna o al più sulla falda del cono di attrito e la sua componente orizzontale (come risulta dalla prima delle (2), tenuto conto che $\ddot{x} = 0$) non può essere positiva.

Le (2) forniscono, in conseguenza delle (3) e (8) e delle osservazioni testè fatte il sistema di relazioni:

$$(9) \quad \left\{ \begin{array}{l} \tau \cos \beta - fN \leq 0, \\ -\tau \sin \beta - N > 0, \\ 2\tau \sin \beta - 4N + p = 0. \end{array} \right.$$

La eliminazione di N fra le due prime dà

$$\sin \beta - \cos \beta > 0$$

verificata identicamente se $\beta = \frac{\pi}{2}$, e che fornisce, in caso diverso,

$$\operatorname{tg} \beta > \frac{1}{f}.$$

(*) Continuazione e fine, -v. num. precedente.

146
Eliminando N fra le due ultime del sistema (9), si ha:

$$2\tau \sin \beta - p > 0$$

e siccome, la precedente garantisce che è $\beta > 0$, se ne trae

$$(10) \quad \frac{\tau}{p} > \frac{1}{2 \sin \beta}.$$

La prima e la terza delle (9) danno:

$$\tau(4 \cos \beta - 2f \sin \beta) - fp \leq 0.$$

Se il coefficiente di τ è negativo o nullo, cioè se

$$\operatorname{tg} \beta \geq \frac{2}{f}$$

la condizione è verificata qualunque sia τ ed è quindi da tener conto unicamente della (10). Se invece

$$\operatorname{tg} \beta < \frac{2}{f}$$

si trae

$$\frac{\tau}{p} \leq \frac{f}{4 \cos \beta - 2f \sin \beta}.$$

In conclusione l'atto di moto iniziale sarà rotatorio intorno ad A , se

$$(11) \quad \operatorname{tg} \beta \geq \frac{2}{f} \quad \text{e} \quad \frac{\tau}{p} > \frac{1}{2 \sin \beta}$$

o se

$$(11') \quad \frac{1}{f} < \operatorname{tg} \beta < \frac{2}{f} \quad \text{e} \quad \frac{1}{2 \sin \beta} < \frac{\tau}{p} \leq \frac{f}{4 \cos \beta - 2f \sin \beta}.$$

Si noti che quest'ultima limitazione per $\frac{\tau}{p}$ è possibile perchè $\operatorname{tg} \beta > \frac{1}{f}$.

6. Perchè il moto incipiente possa essere rotatorio intorno a un punto della verticale di A , devono essere positivi tanto l'accelerazione angolare quanto la componente orizzontale dell'accelerazione del baricentro. Cioè dev'essere:

$$(12) \quad \ddot{x} > 0, \quad \ddot{z} > 0.$$

Come nel caso precedente è $M=0$ e, siccome A striscia sul suolo, è $T = -fN$. In base a ciò e tenuto conto delle (3) e (12),

le (2) forniscono:

$$(13) \quad \begin{cases} \tau \cos \beta - fN > 0, \\ \tau \sin \beta - N > 0, \\ 2\tau \sin \beta - 4N + p = 0. \end{cases}$$

È bene notare subito, a legittimazione di passaggi successivi, che le prime due mostrano che β non può essere nè zero, nè $\frac{\pi}{2}$.

Eliminando N fra la prima e la terza si ha:

$$\tau(4 \cos \beta - 2f \sin \beta) - fp > 0$$

per il che è necessario che sia positivo il coefficiente di τ e cioè

$$\operatorname{tg} \beta < \frac{2}{f}.$$

Si avrà allora

$$\frac{\tau}{p} > \frac{f}{4 \cos \beta - 2f \sin \beta}.$$

Dalla seconda e terza delle (13) si ricava poi

$$\frac{\tau}{p} > \frac{1}{2 \sin \beta}.$$

Siccome

$$\frac{1}{2 \sin \beta} \geq \frac{f}{4 \cos \beta - 2f \sin \beta}$$

secondo che ordinatamente si ha

$$\operatorname{tg} \beta \leq \frac{1}{f},$$

così si conclude che lo stato di moto iniziale avrà il carattere richiesto quando sia

$$(14) \quad \operatorname{tg} \beta \leq \frac{1}{f} \quad \text{e} \quad \frac{\tau}{p} > \frac{1}{2 \sin \beta},$$

oppure quando

$$(14') \quad \frac{1}{f} < \operatorname{tg} \beta < \frac{2}{f} \quad \text{e} \quad \frac{\tau}{p} > \frac{f}{4 \cos \beta - 2f \sin \beta}.$$

7. Lo stato di equilibrio si ha se, inizialmente, oltre alle (3) sono verificate le condizioni

$$\ddot{x} = 0, \quad \ddot{a} = 0.$$

Dalle (2) si trae il sistema:

$$(15) \quad \begin{cases} \tau \cos \beta + T = 0, \\ l(\tau \sin \beta - N) + M = 0, \\ l(2\tau \sin \beta - 4N + p) + 3M = 0. \end{cases}$$

Siccome, in condizioni statiche, la reazione in ogni punto di contatto col suolo è interna o sulla falda del cono di attrito ed è rivolta verso l'alto, si ha $|T_i| \leq fN_i$. Ma $|T| \leq \sum |T_i|$, quindi sarà $|T| \leq fN$. E siccome la prima delle (15) mostra che T non può essere positivo, così avremo $-T \leq fN$. Dalla prima delle (15) deriva perciò l'inequazione $T \cos \beta - fN \leq 0$.

Eliminando M fra le due ultime e tenendo conto nella seconda che M non può essere negativo (v. n. 4), dal sistema (15) discende in definitiva:

$$(16) \quad \begin{cases} \tau \cos \beta - fN \leq 0, \\ \tau \sin \beta - N \leq 0, \\ \tau \sin \beta + N - p = 0, \end{cases}$$

Se $\beta = 0$, si ricava $N = p$ e dalla prima:

$$(17) \quad \frac{\tau}{p} \leq f.$$

Se $\beta > 0$, eliminando N fra la terza e le prime due si ottiene:

$$\frac{\tau}{p} \leq \frac{f}{\cos \beta + f \sin \beta} \quad \text{e} \quad \frac{\tau}{p} \leq \frac{1}{2 \sin \beta}.$$

Ma siccome

$$\frac{f}{\cos \beta + f \sin \beta} \leq \frac{1}{2 \sin \beta}$$

secondo che rispettivamente

$$\operatorname{tg} \beta \leq \frac{1}{f}$$

così si ricava che l'equilibrio sussisterà quando

$$(18) \quad \operatorname{tg} \beta > \frac{1}{f} \quad \text{e} \quad \frac{\tau}{p} \leq \frac{f}{\cos \beta + f \sin \beta}$$

o quando

$$(18') \quad \operatorname{tg} \beta \leq \frac{1}{f} \quad \text{e} \quad \frac{\tau}{p} \leq \frac{1}{2 \sin \beta}.$$

Nella (18) è implicito il caso particolare contemplato dalla (17).

8. Riuniamo ordinatamente in una tabella i risultati contenuti nelle relazioni (6), (7), (11), (11'), (14), (14'), (17), (18), (18').

$\operatorname{tg} \beta = 0$	$\left\{ \right.$	$\frac{\tau}{p} \leq f$	equilibrio
		$\frac{\tau}{p} > f$	strisciamento
$0 < \operatorname{tg} \beta < \frac{1}{f}$	$\left\{ \right.$	$\frac{\tau}{p} \leq \frac{f}{\cos \beta + f \sin \beta}$	equilibrio
		$\frac{f}{\cos \beta + f \sin \beta} < \frac{\tau}{p} \leq \frac{1}{2 \sin \beta}$	strisciamento
		$\frac{\tau}{p} > \frac{1}{2 \sin \beta}$	strisciamento e rotazione
$\operatorname{tg} \beta = \frac{1}{f}$	$\left\{ \right.$	$\frac{\tau}{p} \leq \frac{1}{2 \sin \beta}$	equilibrio
		$\frac{\tau}{p} > \frac{1}{2 \sin \beta}$	strisciamento e rotazione
$\frac{1}{f} < \operatorname{tg} \beta < \frac{2}{f}$	$\left\{ \right.$	$\frac{\tau}{p} \leq \frac{1}{2 \sin \beta}$	equilibrio
		$\frac{1}{2 \sin \beta} < \frac{\tau}{p} \leq \frac{f}{4 \cos \beta - 2f \sin \beta}$	rotazione
		$\frac{\tau}{p} > \frac{f}{4 \cos \beta - 2f \sin \beta}$	strisciamento e rotazione
$\operatorname{tg} \beta \geq \frac{2}{f}$	$\left\{ \right.$	$\frac{\tau}{p} \leq \frac{1}{2 \sin \beta}$	equilibrio
		$\frac{\tau}{p} > \frac{1}{2 \sin \beta}$	rotazione.

Dall'esame di questo quadro analitico si deduce che ad ogni copia di valori di β e τ , cioè ad ogni trazione corrisponde uno stato di moto iniziale ben determinato.

9. Termineremo questo studio analizzando il comportamento delle reazioni nel caso dell'equilibrio. Per la ragione più volte accennata la risultante delle reazioni non è mai nulla ed è diretta verso l'alto. Ne segue che il sistema delle reazioni equivale ad una forza unica Φ applicata in un certo punto P della linea AB .

punto che può dirsi *centro delle reazioni* e che risulta determinato dalla condizione che rispetto ad esso il momento risultante delle reazioni sia nullo. E siccome

$$M_{P_0} = M_A - (A - P_0) \wedge \Phi,$$

detta x_0 l'ascissa di P_0 , dovrà essere

$$x_0 = \frac{M}{N}$$

il che mostra intanto che x_0 non può essere negativo. Tenendo conto della seconda delle (15) e della terza delle (16) si avrà

$$(19) \quad x_0 = \frac{p - 2\tau \sin \beta}{p - \tau \sin \beta} l.$$

Il secondo membro è uguale ad l quando $\tau \sin \beta = 0$ cioè o quando cessa la trazione o quando essa è nel senso della trave; è invece minore di l in ogni altro caso.

Nei primi due, poichè il centro delle reazioni cade nel bari-centro, è plausibile l'ipotesi che le reazioni si distribuiscano uniformemente lungo tutta la trave.

Se $\beta > 0$ il secondo membro della (19) diminuisce mentre τ , partendo dal valore zero, varia crescendo. Il centro delle reazioni va quindi spostandosi progressivamente da G verso A . Il massimo valore che si può dare a τ è quello oltre il quale l'equilibrio verrebbe turbato. Tenuto conto delle (18) e (18') avremo, quando

$$\operatorname{tg} \beta < \frac{1}{f}; \quad \tau = \frac{fp}{\cos \beta + \beta f \sin \beta}; \quad x_0 = l(1 - f \operatorname{tg} \beta)$$

e quindi, in tale caso

$$0 < x_0 < l.$$

Quando invece

$$\operatorname{tg} \beta \geq \frac{1}{f}; \quad \tau = \frac{p}{2 \sin \beta}; \quad x_0 = 0.$$

Se ne conclude, a conferma dei risultati già ottenuti, che, nel primo caso, l'atto di moto iniziale non può essere che traslatorio, mentre nel secondo, in cui il centro delle reazioni è A , può essere rotatorio intorno ad A o ad altro punto della verticale di A .