UMI

Recensioni

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **4** (1925), n.3, p. 132–138.

Unione Matematica Italiana

¡http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1925_1_4_3_132_0¿

RECENSIONI

L. LICHTENSTEIN: *Neuere Entwicklung der Theorie partieller Differentialgleichungen zweiter Ordnung vom elliptischen Typus.* (Teubner, Leipzig, 1924).

È un articolo di 55 pagine dell' « Enciclopedia Matematica » tedesca. L'A., che ha portato notevoli contributi personali alla teoria delle equazioni a derivate parziali, era certamente uno dei più indicati per presentarne un interessante riassunto. L'articolo è, infatti, riuscito un'esposizione organica di tutta la materia trattata. Vi si trovano indicati con chiarezza tutti i vari metodi che furono proposti per risolvere e discutere i problemi al contorno; e questi problemi sono considerati sotto le ipotesi più generali, sia relativamente alla natura del campo, sia relativamente alla natura dei coefficienti delle equazioni a derivate parziali, lineari e non lineari.

Gli autori italiani non furono dimenticati. *l. t.*

E. HILB und M. RIESZ: *Neuere Untersuchungen über trigonometrische Reihen.* (Teubner, Leipzig, 1924).

Riproduce, trasformandola, completandola e aggiornandola, la parte, relativa alle serie trigonometriche, dell'articolo di M. FRÉCHET, sugli sviluppi in serie, apparso, nel 1912, nell'edizione francese dell' « Enciclopedia Matematica ».

Il grande sviluppo, che in questi ultimi venti anni ha preso la teoria delle serie trigonometriche, rendeva necessaria una trattazione a sè di questo argomento; e ben ha fatto l' « Enciclopedia » tedesca a dedicarle completamente un articolo. Nell'edizione francese le serie trigonometriche occupano appena 15 pagine; ora, nell'articolo di H. HILB e M. RIESZ, giungiamo a 40 pagine.

La materia è esposta con ordine e in forma convenientemente concisa; non sarebbe stato possibile entrare in maggiori dettagli senza accrescere di troppo il numero delle pagine dell'articolo.

L'esposizione è divisa in tre parti. La prima è dedicata alle serie di FOURIER delle funzioni di una sola variabile; la seconda, alle serie trigonometriche in generale, sempre però per una sola variabile; la terza, infine, alle serie trigonometriche in più variabili, nonchè alla questione dell'ordine di approssimazione nella rappresentazione delle funzioni mediante somme trigonometriche finite.

Il numero dei lavori apparsi in questi ultimi anni sulle serie trigonometriche è veramente molto grande: non era perciò possibile di citarli tutti. Dobbiamo però rilevare che fra quelli non ricordati ve n'è qualcuno importante: citiamo, per esempio, una Nota di CERNI, sulle serie doppie trigonometriche, e un risultato di LUSIN sull'integrazione termine a termine delle serie trigonometriche. *l. t.*

G. A. BLISS: *Calculus of Variations.* (The Open Court Publishing Company, Chicago, Ill, 1925).

È un libro il cui scopo non è quello di esporre metodi o risultati nuovi. È un piccolo volume che si presenta in forma elegante, e che si propone di portare il lettore a formarsi, rapidamente e senza troppa fatica, un'idea dei problemi che formano l'oggetto del Calcolo delle Variazioni.

Costituisce la prima di una serie di monografie — « The Carus Mathematical Monographs » — (di cui è già annunziata la seconda, sulle funzioni di variabile complessa), la quale ha per iscopo di contribuire alla divulgazione delle teorie matematiche, tanto nel campo della scienza pura quanto in quello della scienza applicata.

Il libro presuppone nel lettore la conoscenza dei principi elementari del calcolo differenziale e integrale; tuttavia alcune sue parti, le introduzioni ai vari capitoli e la impostazione meccanica e geometrica dei problemi considerati, ad esempio, possono essere lette con profitto anche da chi non possiede tali principi.

Dopo un primo capitolo, in cui si espone come storicamente è sorto il Calcolo delle Variazioni e si dà una rapida notizia — sopratutto storica — dei suoi principali problemi, si passa a trattare, in tre capitoli distinti, tre problemi fondamentali: quello della minima distanza in un piano, quello della brachistocrona e quello della superficie di rivoluzione di area minima. Questi problemi sono esaminati minutamente, completamente. Risolvendoli e discutendoli, vengono a porsi, in forma del tutto elementare, i concetti e i metodi fondamentali del Calcolo delle Variazioni. I quali metodi e concetti, abbandonando le forme particolari assunte negli speciali problemi già trattati, si presentano, poi, in un ultimo capitolo, in forma del tutto generale. Così, dai casi particolari, si sale al caso generale, e la teoria assume un carattere di semplicità e di spontaneità veramente notevoli.

La teoria è svolta soltanto per il più semplice dei problemi generali del Calcolo delle Variazioni, per le curve nella forma $y = y(x)$ e per il minimo relativo; per gli altri problemi, l'A. indica al lettore, desideroso di conoscerli, i trattati di maggior mole.

L'esposizione è sempre chiara e felice, ed anche brillante. Non mancano neppure talune novità di trattazione. Rileviamo, fra le altre: la costruzione geometrica dei fuochi nel problema della brachistocrona; la discussione del minimo assoluto nel problema della superficie di rivoluzione di area minima: la dimostrazione della condizione di Jacobi, nel caso generale, fatta, come l'A. ebbe ad indicare in una Memoria dei « Transactions », considerando il problema di minimo dell'integrale che esprime la variazione seconda dell'integrale dato.

G. A. Bliss, a cui il Calcolo delle Variazioni va debitore di diversi importanti risultati, si è ora acquistato, con questo suo libro, una nuova benemerenza. Egli, che ha assolto magistralmente, con la competenza che tutti gli riconoscono, il compito che si era prefisso, ha iniziato nel modo migliore le « Carus Mathematical Monographs ». L. Tonelli

P. Appell: *Sur une forme générale des équations de la dynamique.* Gauthier-Villars, Paris, 1925.

È questo il primo fascicolo d'una nuova raccolta intitolata « Mémorial des Sciences Mathématiques », diretta dal prof. H. Villat dell'Università di Strasburgo, sotto l'alto patronato di parecchie Accademie; con la quale saranno presentati agli studiosi, in forma compendiosa, i soggetti più importanti delle matematiche, i progressi fatti e quelli da fare.

L'opuscolo del sig. Appell, che abbiamo sott'occhio, dimostra l'importanza che assumerà la raccolta, se sarà continuata nell'indirizzo che le ha dato l'illustre Professore della Sorbona.

È noto che le equazioni di Lagrange, sotto la loro forma classica (formate cioè con l'espressioni dell'energia cinetica e del lavoro delle forze applicate), in numero uguale al grado di libertà del sistema, non sono sempre *direttamente* applicabili a tutti i sistemi che si offrono all'indagine del fisico. In base a ciò HERTZ distinse i sistemi in olonomi e non olonomi. Ma anche per i sistemi *essenzialmente olonomi* non tutti i parametri si prestano alla giusta applicazione dell'equazioni di LAGRANGE. La determinazione dei criteri, che devono guidare il calcolatore nella scelta degli opportuni parametri diventa perciò una questione interessante, e fu oggetto di vari studi.

In seguito nacque di qua l'idea che potesse esistere un altro tipo d'equazioni dinamiche più generali di quelle di LAGRANGE e applicabili sempre. Si deve appunto all'APPELL la scoperta di tali equazioni. Egli le rese pubblicamente note nel 1900 in una Memoria del « Journal de Mathématiques ».

Costruita mediante i scelti parametri l'espressione

$$S = \frac{1}{2} \sum_i m_i (x''^2_i + y''^2_i + z''^2_i) = \frac{1}{2} \sum_i m_i \frac{d^2 M_i}{dt^2},$$

che il DE SAINT-GERMAIN ha poi chiamata *energia d' accelerazione* (ma che forse più opportunamente si potrebbe chiamare *energia d' inerzia*), l'equazioni del moto assumono la forma semplicissima

$$\frac{\partial S}{\partial q''_i} = Q_i \qquad (i = 1, 2 - n) \tag{1}$$

dove $\Sigma Q_i \delta q_i$ è il lavoro virtuale delle forze. Esse valgono per ogni sistema e per qualunque scelta dei parametri; epperò meritano d'esser prese in considerazione più di quello che non sia stato fatto finora.

A ciò provvederà molto bene l'opuscolo in discorso, sul quale appunto le questioni qui accennate sono trattate in modo chiaro e completo. e son fatte numerose e utili applicazioni delle (1) tanto nel campo della meccanica propriamente detta, quanto in quello più vasto della fisica matematica. *p. b.*

ANDREA SPEISER: *Klassische Stücke der Mathematik*, 8° grande pag. 168 con 16 figure. (Orell Füssli, Zurigo. Franchi 9).

Lo SPEISER, noto ai cultori della teoria dei gruppi di sostituzioni, per l'ottimo suo Trattato sulla *Teoria dei Gruppi di ordine finito* (Springer, Berlino, 1923), ha mostrato, con questa sua opera, di essere altrettanto versato nella storia della scienza e di possedere vasta cultura letteraria ed artistica.

Sulla scelta dei brani le discussioni sarebbero oziose, poichè è questione di sentimento, di gusto e di inclinazione individuale.

Ma il fatto di aver raccolto questi brani è per sè stesso assai commendevole. Lo SPEISER si è su questo punto incontrato col nostro MIELI; ed invero è questo uno dei modi più efficaci per dar viva e verace rappresentazione del successivo progredire del pensiero scientifico.

I brani riportati dallo SPEISER, quando non siano di autori tedeschi, o che scrissero in tedesco, sono presentati in buone traduzioni tedesche, e sempre sono preceduti da un cenno biografico e da qualche opportuno chiarimento storico.

Ecco il titolo dei 24 brani contenuti nel volume dello SPEISER:

1. L'armonia - ARCHITA.
2. Descrizione della terra - PLATONE.
3. Matematica e Metafisica - PLATONE.
4. L'essenza della matematica - PLATONE.
5. Lo spazio aristotelico - ARISTOTELE.
6. Lo spazio Euclideo - EUCLIDE.
7. Integrazione - ARCHIMEDE.
8. Il mondo (le sfere celesti) e l'al di là - DANTE, *Paradiso* canto 28°.
   (Qui potevasi anche ricordare l'immagine presa dal raddoppiare in progressione continua:

   Ed eran tante, che il numero loro
   Più che il doppiar degli scacchi s' immilla).

9. Proporzioni nell'arte - LEONARDO DA VINCI.
10. Il Paradiso - TINTORETTO.
11. L'influsso delle stelle - KEPLERO.
12. Cartesio - GOETHE.
13. La Geometria analitica - CARTESIO.
14. Il metodo matematico - PASCAL.
15. La legge dei grandi numeri - JACOPO BERNOULLI.
16. Il postulato delle parallele - G. SACCHERI.
17. Dal contratto sociale - G. G. ROUSSEAU.
18. Tecnica dei numeri - L. EULER.
19. Le traversate - L. EULER.
20. Teoria cinetica dei gas - D. BERNOULLI.
21. Relatività - EINSTEIN.
22. Vedute moderne sulla matematica - J. J. SILVESTER.
23. La geometria naturale - J. HJELMSLEW.
24. Dal Teeteto - PLATONE.

e. b.

A. LAFAY: *Notations et formules vectorielles.* Paris, Gauthier-Villars et C.ie, 1925, pag. 33.

In questo volumetto sono esposti molto succintamente i fondamenti del calcolo vettoriale, e sono dedotte le formule, d'uso più comune, relative ai campi vettoriali, che trovano applicazione nelle varie questioni di fisica-matematica. Classificati, come al solito, i campi vettoriali, in campi potenziali (o lamellari o newtoniani) e in campi solenoidali (o laplaciani), denominazioni che trovano in questo lavoro le loro giustificazioni, stabilisce le proprietà integrali caratteristiche degli uni e degli altri; dimostra che un campo qualunque è sempre possibile interpretare come la sovrapposizione di un campo potenziale e di uno solenoidale, e studia infine la differente natura della eventuale discontinuità di ciascuna di queste specie di campi, attraverso una superficie.

Il numero rapidamente crescente di pubblicazioni intorno all'analisi vettoriale è segno evidente dell'importanza che va acquistando questo ramo della matematica. Peccato che gli studiosi delle varie Nazioni non siano ancora d'accordo per adottare le medesime notazioni, malgrado l'esauriente studio che fu fatto in proposito dai professori BURALI-FORTI e MARCOLONGO.

Anche l'egregio Autore del volume in discorso usa notazioni in parte proprie, alcune dovute al RÉSAL. Egli però non opera direttamente sull'*ente vettore*, bensì quasi sempre sulla sua rappresentazione cartesiana.

Distingue i vettori con lettere latine sopra segnate, come ad es. $\bar{a}$; per il prodotto scalare adopera la scrittura $\bar{a}\,\bar{b}$ e usa la scrittura $\overline{\bar{a}\,\bar{b}}$, per il prodotto vettoriale di $\bar{a}$ per $\bar{b}$. Si comprende, come il segno scelto per quest'ultima operazione voglia mettere sull'avvertenza che il risultato è un vettore.

Ma la ripetuta applicazione di questa operazione in combinazione col prodotto scalare dà luogo a scritture poco comode, di non facile analisi e col pericolo, che se i tratti non hanno giusta lunghezza, modificano o lasciano incerti sul contenuto della formula. Quindi necessità di molta cautela nello scrivere, non certamente a vantaggio dello sviluppo del concetto.

L'A. inoltre parla di un *prodotto di più vettori*, intendendo con questa operazione il seguirsi alternativamente delle due operazioni, prodotto scalare di due vettori e prodotto di uno scalare per un vettore.

Ma, oltre a non essere necessaria, questa riunione di operazioni non sembra neppure perfettamente logica, poichè prodotto di vettore e numero, prodotto scalare di due vettori sono operazioni con proprietà distinte.

Nell'analisi vettoriale l'A. fa uso di un operatore $\overline{D}$ che chiama *derivato*, applicabile a scalari e a vettori, e lo tratta come un fattore simbolico. Quest'operatore, a seconda che opera sopra lo scalare a o sul vettore $\overline{a}$ ed, in quest'ultimo caso, se scalarmente o vettorialmente, dà risultati che l'A. chiama rispettivamente il ***derivato dello scalare*** a, oppure il ***derivato del vettore*** $\overline{a}$, oppure il ***derivato-vettore del vettore*** $\overline{a}$. Ordinariamente questi risultati si ottengono applicando allo scalare a o al vettore $\overline{a}$ rispettivamente gli operatori grad, div, rot. Ma, a parte le notazioni usate dall'A. per rappresentare le operazioni che danno tali risultati, l'operatore $\overline{D}$ ed un altro di cui fa uso, ricevono dall'A. una definizione cartesiana, e perciò non ha il carattere degli operatori vettoriali, di prescindere da terne cartesiane di riferimento. Cartesiano è pure il metodo seguito dall'A. nello stabilire i teoremi integrali dell'analisi vettoriale; ed infatti traduce vettorialmente formule che con il calcolo cartesiano si stabiliscono nei trattati di Calcolo, invece di operare esclusivamente con gli strumenti vettoriali.

Se questo libro, concludendo, è da lodarsi per i fini didattici a cui mira, dal punto di vista scientifico non ci sembra rispecchiare il progresso ottenuto nelle ottime trattazioni apparse in questi ultimi vent'anni intorno all'interessante argomento.

MARIO MANARINI