UMI

Sunti di lavori esteri

* Lavori di: J. B. Shaw, D. Mordouhay-Boltovskoy, V. Brun, L. Pomey, De-Séguier, A. Châtelet, J. Wolff, E. Borel, N. Bary, P. Alexandroff e P. Urysohn, 8. Bernstein, T. Carleman, A. Rajchman, A. Zigmund, E. Kogbetliantz, M. Gevrey, H. Bohr, A. Cahen, S. Bernstein

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **4** (1925), n.3, p. 118–124.

Unione Matematica Italiana

¡http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1925_1_4_3_118_0¿

SUNTI DI LAVORI ESTERI

J. B. SHAW. — *General Vector Calculus.* Trans. of the American Math. Soc., vol. XXIV (1922).

Questa Memoria, che riassume, con applicazioni, varii altri lavori dello SHAW stesso, espone una generalizzazione del concetto e della teoria dei vettori.

Come è ben noto dalle prime proprietà dei vettori comuni, questi non costituiscono un'algebra (associativa) (1) rispetto al prodotto vettoriale (tanto meno rispetto al prodotto scalare). I quaternioni (reali) di HAMILTON costituiscono invece un'algebra associativa (e primitiva). È legittimo dire che un quaternione è la somma di uno scalare e di un vettore? Non è qui il caso di accennare alle diverse interpretazioni del pensiero di HAMILTON a questo riguardo. La cosa dipende dal modo di concepire la somma. Secondo il concetto di SHAW è legittimo considerare un quaternione come somma di uno scalare e di un vettore; allora un vettore è un particolare quaternione, e la totalità dei vettori costituisce un *sistema* (2) nell'algebra dei quaternioni, assumendo però, naturalmente, come prodotto di due vettori il loro *prodotto quaternionale* o *prodotto Hamiltoniano* (che, come è noto, risulta uguale al prodotto interno, cambiato di segno, più il prodotto esterno).

Il calcolo vettoriale generale di SHAW considera vettori in uno spazio ad infinite dimensioni, l'infinità di esse potendo essere numerabile o no. Col metodo che egli segue, la teoria è condotta in modo indipendente dal numero delle dimensioni dello spazio, e perciò senza l'uso di coordinate, operando sempre direttamente sui vettori, come si fa anche nel calcolo vettoriale usuale. Il vet-

(1) Per quanto riguarda i concetti relativi alla teoria delle algebre, può vedersi l'articolo *Notizie sopra alcuni recenti lavori sulla teoria delle algebre*, a pag. 77 di questo Bollettino.

(2) Vedasi, ad es., il sopra citato art., n. 3.

tore è definito come un ente che è sottoposto a certe condizioni che ne costituiscono la definizione, in modo analogo a ciò che si fa per definire gli elementi di un' algebra.

Questi postulati fondamentali, che definiscono il concetto di vettore, non costituiscono un insieme tanto semplice da potersi accennare in poche parole. Vi sono anzitutto i postulati relativi alla moltiplicazione scalare ed alla somma; dipoi quelli relativi alla definizione di certi operatori (o processi), gli *alternanti*, che applicati ad n vettori producono un vettore (vettore semplice di grado n), e quelli relativi ad un altro processo che applicato a due vettori (di grado qualsivoglia) produce un numero (scalare). Sulla base di tali postulati vengono definiti altri operatori (o processi), che conducono infine a quella definizione del prodotto Hamiltoniano di due vettori di grado qualsivoglia che costituisce la estensione del prodotto quaternionale di due vettori ordinari. Il prodotto Hamiltoniano risulta associativo; esso è l' algoritmo fondamentale di questa teoria; da esso possono ricavarsi gli operatori sopra definiti (ad es. per i vettori comuni il prodotto interno è la parte scalare, cambiata di segno, del prodotto Hamiltoniano, ecc.).

Partendo da un concetto così generale di vettore, possono aversi varie applicazioni (oltre la estensione di quelle, più comuni, alla geometria differenziale, alla meccanica, ecc.). Ad es.: siano α_1, α_2,.... vettori linearmente indipendenti (in numero finito od infinito, ma numerabile); il sistema determinato da essi sarà rappresentato da $\Sigma x_i \alpha_i$ con le x_i variabili; ma se i vettori linearmente indipendenti sono dati da $\alpha(i)$ dove i percorre un' infinità (anche non numerabile) di valori, il sistema determinato da essi sarà rappresentato da $\int_a^b x(i)\alpha(i)di$. Se i vettori considerati sono funzioni di una variabile z, ogni vettore $\xi(z)$ del sistema è rappresentato, per una conveniente scelta dei coefficienti x_i o della funzione $x(i)$, dalla formula

$$\xi(z) = \Sigma x_i \alpha_i(z)$$

oppure

Ciò si riattacca alla rappresentabilità di una funzione per mezzo di una serie o di un integrale definito, ed alla teoria delle equazioni integrali.

Fissate, nel modo sopra accennato, le proprietà fondamentali, lo SHAW continua, nella citata Memoria, a sviluppare la teoria, stabilendo varie formule, algebriche, differenziali ed integrali, come si fa nella usuale teoria dei vettori; ed altri sviluppi accenna che seguiranno, con applicazioni, in successivi lavori. Applica infine intanto la teoria svolta ad esporre, seguendo tale metodo vettoriale, i principi della geometria differenziale in uno spazio di dimensione n (curvatura, applicabilità, geodetiche, curve immerse in uno spazio curvo di dimensione n, ecc.). *f. c.*

Recensioni dei lavori pubblicati nei « Comptes Rendus » de l'Académie des Sciences, T. 177 (2° sem. 1923).

Teoria dei numeri. — D. MORDOUHAY-BOLTOVSKOY (Comptes Rendus », T. 177, pag. 475).

Dà alcune generalizzazioni dei risultati ottenuti nella sua nota [1]: *Sul logaritmo d'un numero algebrico*, trattando di certe categorie di numeri trascendenti.

— — V. BRUN (*Ibid*, pag. 1810).

Studia direttamente la funzione di RIEMANN,

$$f(x) = \pi(x) + \frac{1}{2}\pi(\sqrt{x}) + \frac{1}{3}\pi(\sqrt[3]{x}) + \dots,$$

presa come punto di partenza da RIEMANN per le ricerche sul numero $\pi(x)$ dei numeri primi non superiori ad x, e dà alcuni risultati [2].

— — L. POMEY (*Ibid*, pag. 1187).

Dà diverse condizioni necessarie senza le quali l'equazione di FERMAT

$$x_1^n + x_2^n + x_3^n = 0$$

è effettivamente impossibile e si pone successivamente nel caso in cui x_1, x_2, x_3 sono primi con n ed in quello in cui uno di questi numeri è divisibile per n. Stabilisce così l'impossibilità dell'equazione per diversi numeri e specialmente per $n = 5.003.249$.

[1] C. R., T. 176, pag. 724.

[2] V. MÖBIUS, Journal de Crelle, t. 9 (1832); WERKE B. IV, pag. 600. BRUN, *Le crible d'Eratosthène et le théorème de Goldbach.* Videnskapsselskapets Skrifter, Kristiania, 1920.

Teoria dei gruppi. — DE-SÉGUIER (Comptes Rendus, T. 177. pag. 237).

Enuncia i risultati che ha ottenuto sui generatori e sulla struttura dei gruppi lineari ad invariante bilineare e quadratico nel campo reale o complesso.

— — A. CHÂTELET (*Ibid*, pag. 729).

Utilizzando il metodo segnalato in una nota precedente [1] per lo studio dei gruppi abeliani finiti, stabilisce numerose proprietà di questi gruppi che enuncia in questa nota, ponendo in evidenza la mutua dipendenza tra la teoria dei gruppi abeliani e l'aritmetica delle matrici.

Teoria degli insiemi. — J. WOLFF (Comptes Rendus, T. 177, pag. 863).

Generalizzando un metodo di HAUSDORFF [2] semplifica e generalizza la seguente proporzione dovuta a CARATHÉODORY: « in un insieme di misura positiva esistono insiemi parziali non « misurabili ».

— — E. BOREL (*Ibid*, pag. 864).

Richiama l'attenzione sul risultato paradossale della nota precedènte di WOLFF facendo presente che esso o dipende dal postulato di ZERMELO o dalla nozione stessa d'insiemi non misurabili.

— — N. BARY (*Ibid*, pag. 1195).

Chiamando insieme (u) un insieme tale che una serie trigonometrica converga ovunque verso zero salvo per i punti di un tale insieme e generalizzando un risultato di RAJCHMANN [3], mostra, in seguito ad una nota di ZIGMUND [4], che la somma d'una infinità numerabile d'insieme (u) è un insieme (u); questo risultato permette di costruire insiemi (u) aventi la potenza del continuo in tutti gli intervalli comunque piccoli essi siano.

— — P. ALEXANDROFF e P. URYSOHN (*Ibid*, pag. 1274).

FRÉCHET ha per primo formulato esplicitamente il problema [5] d'indicare le condizioni perchè una classe (L) sia una classe (D),

(1) C. R., T. 175 (luglio 1922), pag. 85.
(2) BOREL, *Leçons sur la théorie des fonctions*, 2ª ed., pag. 255.
(3) Fund. Mat., vol. 34.
(4) C. R., T. 177, pag. 491.
(5) R. Circ. Mat. di Palermo, 1906.

o, ciò che è lo stesso, di determinare le condizioni perchè uno spazio topologico sia uno spazio metrico; problema studiato da HEDRIK, FRÉCHET, CHITTENDEN, MOORE, VICTORIS; in questa nota gli AA. dimostrano il teorema che la condizione necessaria e sufficiente è che lo spazio contenga una catena completa regolare [1].

Funzioni di variabile reale. — S. BERNSTEIN (Comptes Rendus T. 177, pag. 99).

Tratta della approssimazione delle funzioni possedenti un punto singolare essenziale. Se $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{A_n}{(x-a)^n}$ è una funzione avente un punto singolare essenziale $a>1$, indica, per $A_n\geq 0$, il valore asintotico della sua migliore approssimazione $E_nf(x)$, nel segmento $(-1, +1)$, mediante l'uso di polinomi di grado n. Accenna al caso che il segno dei coefficienti sia qualunque.

— — T. CARLEMAN (*Ibid*, pag. 422).

Essendo a_1, a_2,... una successione di numeri positivi, l'A. dice che la funzione $f(x)$ indefinitamente derivabile nell'intervallo (a, b) appartiene alla classe C_A, se esiste un numero k tale che:

$$|f^{(n)}(x)|<k^n a_n \qquad (n=1, 2,...)$$

e la classe C_A sarà quasi analitica, secondo BOREL, se ciascun funzione che vi appartiene è determinata dalla conoscenza di $f(x)$ e di tutte le derivate in un solo punto di (a, b). Da risultati di DENJOY si sa che la divergenza delle serie $\sum_0^{\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{a_n}}$ è sufficiente per assicurare la quasi analiticità di C_A. Se u_1, u_2,... è una successione di numeri positivi, se u'_n è il limite superiore dell'insieme u_n, u_{n+1}, chiama $\sum_0^{\infty} u'_n$ la maggiorante minima non crescente [2] di Σu_n ed enuncia l'interessantissimo teorema: « La « condizione necessaria è sufficiente per la quasi analiticità di C_A è « che la maggiorante minima non crescente della $\sum_0^{\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{a_n}}$ sia di- « vergente ».

[1] Nella nota sono richiamate le definizioni necessarie.
[2] La plus petite majorante non croissante.

Funzioni di variabile reale. — A. RAJCHMAN (*Ibid*, pag. 491).

Estende le operazioni formali legittimate da RIEMANN sulle serie trigonometriche alle serie divergenti sommabili secondo il procedimento di POISSON ed enuncia i risultati ottenuti e quelli precedentemente pubblicati in polacco [1].

— — A. ZIGMUND (*Ibid*, pag. 521, 576).

Nella prima nota si occupa della estensione dei teoremi di RIEMANN relativi alle operazioni formali che si possono effettuare sulle serie trigonometriche; nella seconda nota generalizza le proposizioni di RIEMANN concernenti l'unicità degli sviluppi trigonometrici e l'utilizzazione di questi sviluppi.

— — E. KOGBETLIANTZ (*Ibid*, pag. 674).

Tratta dell'unicità delle serie trigonometriche completando i teoremi di RIESZ [2] e precisando i rapporti tra i due metodi di sommazione delle serie divergenti di CESÀRO e di RIEMANN.

— — M. GEVREY (*Ibid*), pag. 734).

Fa seguito ad una sua nota [3] nella quale aveva mostrato certe proprietà delle funzioni indefinitamente derivabili che sono comuni con le funzioni analitiche. In questa nota l'autore mette in armonia i suoi risultati con i lavori recenti di DENJOY e CARLEMAN, che hanno permesso di ampliare la definizione di funzione quasi analitica di una variabile reale.

— — H. BOHR (*Ibid*, pag. 737, 1090).

Introduce la definizione di funzioni *quasi-periodiche* [4]. Fa vedere che questo concetto è invariante rispetto alle operazioni razionali di calcolo. Enuncia i teoremi fondamentali che pongono in evidenza il legame fra queste funzioni e le serie di FOURIER generalizzate $\sum_0^\infty a_n e^{i\lambda_n x}$. Per $\lambda_n = nk (n = 0, \pm 1, ...)$ si hanno le fun-

(1) C. R. Société de Varsavie, 1918; Prace Matem. Fiz., vol. 30, 1919. Fundamenta Math., vol. 3.

(2) Math. Annalen, t. 71, (1911).

(3) C. R., T. 174, (1922), p. 368.

(4) BOHR, Thèse, Darstellung von Funktionen einer variablen durch trigonometrische Reihen, Dorpat, 1883; Bull. Soc. Mat., t. 38, 1910, pag. 5; Journ. für Mat., T. 131, 1906, pag. 268. ESCLAGON, Les fonction quasi périodiques, Paris, 1904.

zioni rigorosamente periodiche, per $\lambda_n = n_1 k_1 + n_2 k_2 + \dots + n_p k_p$ si hanno le funzioni quasi periodiche di BOHL e ESCLAGON (¹).

Nella seconda nota introduce il concetto di *base* degli esponenti λ_n, e prosegue l'importantissime ricerche comunicate nella prima, studiando dapprima il caso nel quale la serie di FOURIER generalizzata $\Sigma a_n e^{i\lambda_n x}$ della funzione $f(x)$ ammette degli esponenti a base intera. Se questa base è finita la funzione $f(x)$ rientra nella categoria periodica di BOHL ed ESCLAGON.

Funzioni di variabile reale. — A. CAHEN (*Ibid*, pag. 934).

Se $R(z)$ è una funzione positiva crescente indefinitamente con z, e così anche la sua derivata, il numero N essendo positivo, pone

$$R(a_1 - 1) < N < R(a_1),$$

essendo $a_1 - 1$ ed a_1 due interi consecutivi, e

$$N = R(a_1) - \frac{R(a_1) - R(a_1 - 1)}{x_1}; \qquad (x_1 > 1)$$

analogamente

$$x_1 = \frac{R(a_2) - R(a_2 - 1)}{x_2}, \text{ ecc....},$$

determina così uno sviluppo in frazione continua del numero N. Fa il caso $R(z) = z^p$ considerato da APPELL (²).

— — S. BERNSTEIN (*Ibid*, pag. 937).

In seguito alle recenti ricerche sulle funzioni quasi analitiche di DENJOY e CARLEMAN mostra che da un punto di vista differente (³) aveva, trattando della migliore approssimazione delle funzioni mediante polinomi di grado n, riscontrato delle condizioni analoghe a quelle determinate dai su detti autori, e pone in evidenza le due teorie.

g. b.

(continua)

(¹) Vedasi: BOHR. Acta Mathematica, T. 45, fasc. 1 e 2, e recensione Boll. U. M. I. A. III, a. 5, pag. 220, A. IV, a. 1, pag. 27.

(²) Vedasi: APPELL. Interm. des Math., 1813, pag. 160; Bull. Soc. Math., 1914, pag. 118-120.

(³) S. BERNSTEIN, Mat. Annalen, 1914, t. 75.