BOLLETTINO
UNIONE MATEMATICA
ITALIANA

GIUSEPPE BELARDINELLI

Sulle funzioni quasi-analitiche di variabile reale

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **4** (1925), n.3, p. 100–103.

Unione Matematica Italiana

¡http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1925_1_4_3_100_0¿

Sulle funzioni quasi-analitiche di variabile reale.

Nota di GIUSEPPE BELARDINELLI

1. La sviluppabilità in serie di TAYLOR, che caratterizza le funzioni analitiche, dipende da una legge di limitazione delle derivate successive.

Precisamente, se $f(x)$ è analitica regolare in un certo campo, si può determinare una costante β positiva tale che la disuguaglianza

$$\sqrt[n]{|f^{(n)}(x)|} < \beta n$$

sia valida per ogni n; ed inversamente, se questa condizione è verificata in un certo campo, la funzione, in questo campo, è regolare.

Il BOREL ha dimostrato ([1]) l'esistenza di funzioni appartenenti a classi più generali di quelle delle funzioni analitiche (funzioni quasi-analitiche) funzioni determinate, come le funzioni analitiche dai lori valori e da quelli delle loro derivate successive in uno stesso punto.

Siano

$$A_1, \quad A_2, \ldots, \quad A_n, \ldots$$

dei numeri positivi tali che la successione $\sqrt[n]{A_n}$, per n abbastanza grande, sia non decrescente.

Si può allora far corrispondere a questa successione una classe C^A di funzioni indefinitamente derivabili tali che

$$\sqrt[n]{|f^{(n)}(x)|} < \beta A_n, \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

ove β è una costante che può variare da funzione a funzione.

E secondo la definizione di BOREL, C_A è detta quasi-analitica in un intervallo, se ciascuna delle sue funzioni è determinata dalla conoscenza di $f(x)$ e di tutte le sue derivate in un solo punto dell'intervallo.

DENJOY ha dimostrato un teorema ([2]), completato da CAR-

([1]) E. BOREL: *Les séries de fonctions analytiques et les fonctions quasi-analytiques.* « Comptes Rendus », t. 154, 1912, pag. 1491. — *Leçons sur les fonctions monogènes uniformes.* Gauthiers-Villars, 1917.

([2]) DENJOY: « Comptes Rendus », t. 173, 1921, pag. 1329.

LEMAN [3], che dà, quale condizione sufficiente per la quasi-analiticità della $f(x)$, la divergenza della serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{A_n}},$$

e in particolare ha dimostrato che le classi C_1, C_2, C_3,... di funzioni indefinitamente derivabili che soddisfano alla condizione:

$$C_1) \qquad \sqrt[n]{|f^{(n)}(x)|} < kn \log n,$$

$$C_2) \qquad \sqrt[n]{|f^{(n)}(x)|} < kn \log n \log\log n, \; ....$$

sono classi di funzioni quasi-analitiche.

Il CARLEMAN [4] ha dato poi una condizione necessaria e sufficiente per la quasi analiticità.

DE LA VALLÉE POUSSIN [5] ha inoltre dimostrato che le funzioni periodiche

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos nx$$

possono rappresentare funzioni quasi-analitiche imponendo delle limitazioni ai coefficienti a_n.

In questa nota dimostro, analogamente, che le funzioni quasi-periodiche del BOHR [6] $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{i\lambda_n x}$, possono rappresentare funzioni quasi-analitiche caratterizzate dagli appartenenti coefficienti di FOURIER.

2. Sia data la funzione $f(x)$ in un intervallo e rappresentabile mediante la serie

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \varphi_n(x); \qquad (\varphi_0(x) = 1)$$

indefinitamente derivabile termine a termine.

(3) CARLEMAN: « Comptes Rendus », t. 174, 1922, pag. 373. — Congrès des Mathématiques à Helsingfors, 1922.

(4) CARLEMAN: « Comptes Rendus », t. 176, 1923, pag. 422.

(5) DE LA VALLÉE POUSSIN: *Sur les fonctions quasi-analytiques de variable réelle.* « Comptes Rendus », t. 176, 1923, pag. 1635. — Bullettin de la Societé Math. de France, 1924, t. LII, pag. 196.

(6) H. BOHR: « Comptes Rendus », t. 177, 1923, pag. 737 e pag. 1090. — Acta Mathematica B. 45, pag. 29.

Supponiamo:

1°) che i coefficienti a_n soddisfino alla limitazione

$$|a_n| < Ae^{-\frac{n}{\log n}} \qquad (A \text{ costante});$$

2°) che le derivate delle funzioni $\varphi_n(x)$ soddisfino in un intervallo, che può essere lo stesso di quello in cui è data la funzione $f(x)$, alla disuguaglianza

$$|\varphi_n^{(p)}(x)| < n^p.$$

Consideriamo la funzione

$$F(p,\ n) = ne^{-\frac{n}{2p \log n}},$$

ed indichiamo $\frac{n}{\log n} = \alpha(n)$ con z, e con β la funzione inversa della $z = \alpha(n)$, avremo

$$F(p,\ \beta(z)) = \beta(z)e^{-\frac{z}{2p}}.$$

Per $z > 2p$ questa funzione sarà decrescente; il massimo si avrà dunque per $z < 2p$, massimo che è minore di $\beta(2p)$.

Si avrà, indicando con M il massimo di $e^{-\frac{z}{2}}\beta(z)^p$:

$$|f^{(p)}(x)| = \left|\sum_{n=0}^{\infty} a_n\varphi_n^{(p)}(x)\right| < AM \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\frac{n}{2 \log n}}$$

da cui si ha immediatamente, essendo $\sum\limits_{n=0}^{\infty} e^{-\frac{n}{2 \log n}}$ convergente e quindi minore d'un numero positivo B,

$$\sqrt[p]{|f^{(p)}(x)|} < B\sqrt[p]{A \cdot M} < A \cdot B\,\beta(2p),$$

cioè:

$$\sqrt[p]{|f^{(p)}(x)|} < Bp \log p, \qquad (B \text{ costante}).$$

La funzione $f(x)$ è dunque una funzione quasi-analitica.

Analogamente si faccia l'ipotesi che

$$|a_n| < Ae^{-\frac{n}{\log n \log \log n}};$$

si avrà

$$\sqrt[p]{|f^{(p)}(x)|} < Bp \log p \log \log p,$$

e così di seguito, ottenendo le classi C_1, C_2, ... di funzioni quasi-analitiche stabilite da DENJOY.

3. Consideriamo ora le funzioni

$$f(x) = \Sigma\, a_n e^{i\lambda_n x},$$

e supponiamo:

1°) che i coefficienti a_n, reali o complessi, soddisfino alla limitazione

$$|a_n| < e^{-\frac{n}{\log n}};$$

2°) che i numeri λ_n siano reali, linearmente indipendenti, e tali che

$$|\lambda_n| < n.$$

Si avrà allora, per la convergenza delle serie

$$\Sigma\, |a_n|\, |\lambda_n|^p, \qquad (p = 0,\ 1,\ 2, \ldots)$$

che la $f(x)$ e le sue derivate rappresentano funzioni quasi-periodiche di BOHR.

In base al numero precedente potremo dunque classificare le funzioni quasi-periodiche del BOHR, in classi di funzioni quasi-analitiche.

Potremo dunque concludere:

« Se nelle serie, che rappresentano funzioni quasi-periodiche « del BOHR,

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{i\lambda_n x},$$

« si ha:

$$|a_n| < e^{-\frac{n}{\log n}}, \quad |a_n| < e^{-\frac{n}{\log n \log\log n}}, \ldots$$

« ed

$$|\lambda_n| < n,$$

« queste serie rappresentano classi di funzioni quasi-analitiche ».

R. Università di Cagliari, aprile 1925.