UMI

Recensioni

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **4** (1925), n.2, p. 86–91.
Unione Matematica Italiana
¡http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1925_1_4_2_86_0¿

RECENSIONI

N. E. NÖRLUND: *Differenzenrechnung.* Berlin, J. Springer, 1924, p. IX-551 *(continuazione e fine).*

Nel capitolo ottavo tratta delle serie di interpolazioni classiche, cioè: delle serie di STIRLING, di BESSEL, di GAUSS e di NEWTON.

È noto come il NÖRLUND si sia occupato [1] recentemente dello studio di queste serie, proseguendo e completando le ricerche di HERMITE, PEANO, JENSEN, BENDIXSON, PINCHERLE, PÒLYA, CARLSON, LANDAU, ecc.; nel presente capitolo egli espone un quadro completo di questi risultati, tratta del problema di interpolazione: cioè della determinazione delle condizioni a cui debbono soddisfare i coefficienti di una serie di interpolazione perchè la serie converga, della sviluppabilità di una funzione in serie di interpolazione, del rapporto del campo di convergenza di questa serie colle proprietà analitiche della funzione che rappresenta. Inoltre fa delle applicazioni di queste serie alla risoluzione delle equazioni alle differenze ed allo sviluppo delle soluzioni principali in serie di questa forma.

Nel capitolo seguente tratta delle serie di facoltà, al cui studio SCHLÖMILCH, JENSEN, PINCHERLE, LANDAU, NIELSEN, BOHR, HORN, ecc. e lo stesso NÖRLUND [2] hanno portato contributi notevoli: espone la dipendenza di queste serie con l'integrale di LAPLACE e con la risoluzione delle equazioni alle differenze.

Nei capitoli 10°, 11° e 12° raccoglie le questioni relative alle equazioni alle differenze lineari che determinano una nuova classe di trascendenti uniformi e per le quali le serie di interpolazioni

[1] N. E. NÖRLUND, *Sur les séries des facultés*, Acta Math., 37 (1914), p. 327-387.

[2] N. E. NÖRLUND, *Sur l' interpolation*, Bull. Soc. Math. France, 52 (1924), p. 114-132.

e di facoltà hanno una importanza fondamentale, come il NÖRLUND stesso aveva dimostrato [1].

La teoria generale delle equazioni alle differenze si può dire appena iniziata, lo studio è limitato ad alcuni casi particolari per opera principalmente di PICARD, HORN, E. E. LEVI; più avanzate sono invece le ricerche sulle equazioni lineari delle quali il NÖRLUND parla in questo libro, ponendosi dal punto di vista della teoria delle funzioni.

Espone il teorema di POINCARÉ; cioè, sia l'equazione della forma:

$$p_0(n)f(n) + p_1(n)f(n+1) + \dots + p_{k-n}f(n+k-1) + f(n+k) = 0,$$

dove la variabile n sia un intero, i coefficienti $p_i(n)$ delle funzioni tali che abbiano limiti finiti per n tendente all'infinito, e siano

$$\alpha_1 > |\alpha_2 > \alpha_3 > \dots > \alpha_n,$$

le radici della equazione caratteristica

$$A_k z^k + A_{k-1} z^{k-1} + \dots + A_0 = 0.$$

POINCARÉ ha dimostrato che

$$\frac{f(n+1)}{f(n)}$$

tende ad un limite per n tendente all'infinito che è in generale uguale ad α_1 ma può essere uguale per certe soluzioni particolari anche ad altre radici, teorema che è stato completato da PINCHERLE che vi ha collegato il suo concetto di *integrale distinto*, da PERRON, ecc.

NÖRLUND tratta poi delle soluzioni analitiche delle equazioni

$$\sum_{i=0}^{n} p_i(x)f(x+1) = 0, \tag{9}$$

ove x è variabile complessa, facendo larghe ipotesi sulle $p_i(x)$; ne determina un sistema fondamentale di soluzioni uniformi $f_i(x)$, la soluzione generale è allora esprimibile nella somma

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} \pi_i(x) f_i(x),$$

$\pi_i(x)$ essendo funzioni periodiche di periodo uno.

(1) N. E. NÖRLUND, *Sur les équations linéaires aux différences finies à coefficients rationnels*, Acta Math., 40 (1915), p. 191-249.

Considera il caso in cui i coefficienti sono funzioni razionali, nel quale mediante la trasformazione di LAPLACE la risoluzione della (9) viene ricondotta a quella di una equazione differenziale.

È possibile allora determinare due sistemi fondamentali di funzioni uniformi meromorfe in tutto il piano $f_i(x)$, $\overline{f_i(x)}$, dove i poli sono ben individuabili; funzioni che, come il NÖRLUND ha dimostrato, si presentano nella forma:

$$a_i^x x^{\rho_i} \sum_{r=0}^{r} \varphi_r(x)(\log x)^r \tag{10}$$

dove ρ_i, a_i sono costanti e $\varphi_r(x)$ sono funzioni che si rappresentano mediante serie di facoltà. Sistemi che ammettono una relazione lineare dalla quale si determina il comportamento delle $f_i(x)$, e $\overline{f_i(x)}$ per x tendente all'infinito. Applica all'equazione:

$$\sum_{i=0}^{n} [c_i + b_i(x+i)]u(x+i) = 0.$$

Si può estendere una parte dei risultati precedenti al caso che i coefficienti $p_i(x)$, della equazione alle differenze, siano delle funzioni che si esprimono mediante serie di facoltà. È possibile allora determinare un sistema di soluzioni fondamentali regolari che prende la forma (10), ove le funzioni $\varphi_r(x)$ sono funzioni esprimibili in serie di facoltà; l'A. ne studia il comportamento asintotico del sistema, la continuazione analitica, ed applica al caso della equazione

$$\sum_{i=0}^{n} (-i)^i (x-1)(x-2)\dots(x-i) a_i \overset{i}{\underset{1}{\Delta}} u(x) = 0.$$

Nel capitolo 13° espone le ricerche di BIRKHOFF: considera il sistema di equazioni della forma

$$f_i(x+1) = \sum_{j=1}^{n} p_{ij}(x) f_j(x) \qquad (i = 1, 2, \dots, n)$$

a coefficienti razionali. Se $F(x)$ è la matrice formata da n sistemi di soluzioni linearmente indipendenti f_{ij}, e $P(x)$ la matrice delle funzioni p_{ij}, possiamo scrivere il sistema nella forma

$$F(x+1) = P(x)F(x).$$

Tratta quindi delle soluzioni principali di questa matrice, del problema di RIEMANN esteso a queste equazioni, ecc. Nel capitolo seguente mostra come mediante l'operazione $\mathop{S}_{a}^{x} \varphi(x) \Delta x$ si possa facilmente risolvere l'equazione alle differenze lineari completa, applicando il metodo delle variazioni delle costanti di LAGRANGE.

Termina il libro colle ricerche di THIELE sulle differenze reciproche, differenze che possono esprimersi mediante integrali, come le funzioni interpolari, e colla loro applicazione alla risoluzione delle equazioni alle differenze ed alle equazioni differenziali.

Chiudono il libro quattordici tavole numeriche, utili per le pratiche applicazioni del Calcolo delle differenze, ed una assai estesa e completa bibliografia del Calcolo stesso, che riuscirà di sommo vantaggio ai cultori di questo ramo di scienza. Non è dunque fuori di luogo di augurare al bellissimo libro del NÖRLUND una grande diffusione in Italia, in guisa che sia fonte anche da noi di nuove ricerche sul calcolo delle differenze.

Cagliari, novembre 1924.

GIUSEPPE BELARDINELLI

NIELS NIELSEN. *Traité élementaire des nombres de Bernoulli.* Paris, Gauthier-Villars, 1923, pagg. X-398).

L'Autore si propone, in questa opera, di raccogliere e sviluppare, nel modo più ampio, quanto si riferisce alla teoria dei celebri numeri di BERNOULLI e alle loro applicazioni aritmetiche. Egli ricorda come GIACOMO BERNOULLI, nell'*Ars conjectanti*, pubblicata nel 1713, sei anni dopo la sua morte, e che è una delle sorgenti del Calcolo delle probabilità, introduce in modo del tutto elementare quella successione mirabile di numeri razionali cui è rimasto il suo nome, e si propone di riprenderne la teoria e di esporre i risultati che vi sono stati recati in un periodo di due secoli, rimanendo fedele a quel punto di partenza elementare: mentre, come egli osserva, quasi tutti gli sviluppi posteriori sono stati dati alla teoria stessa fondandosi sulla considerazione di funzioni trascendenti che, secondo lui, molte volte hanno complicato inutilmente le cose. In ciò differisce essenzialmente il suo libro da quello dello SAALSCHÜTZ (1). Premesse alcune nozioni generali sui polinomi interi, sulla funzione aritmetica $\varphi(n)$, sul

(1) *Vorlesungen über Bernoulli'sche Zahlen* (Berlin, Springer, 1892).

calcolo delle differenze, si definiscono le successioni di polinomi $f_n(x)$ che l'A. chiama *armoniche*, tali cioè che $\frac{df_n(x)}{dx} = f_{n-1}(n)$, e che si riconducono agevolmente a quelle notoriamente studiate da APPELL, indi i polinomi che egli dice simmetrici, tali cioè da soddisfare all'equazione funzionale

$$f_n(-x-1) = (-1)^n f_n(x);$$

indi ottiene i noti polinomi di BERNOULLI come quelli che appartengono contemporaneamente all'una e all'altra classe, e dalle proprietà che si deducono da questo fatto ricava tutta quanta la teoria dei numeri che formano l'argomento della sua opera, che si chiude con numerose applicazioni a varie parti dell'aritmetica superiore. Il carattere organico è dato al presente libro dallo svilupparsi secondo la via tracciata per primo dal BERNOULLI stesso ma abbandonata dai suoi successori; pregi ne sono sia la cospicua raccolta di formule che esso racchiude e che fornisce un prezioso sussidio a chi debba, per qualche applicazione, imbattersi in questioni di cui codesti numeri si presentano, sia le numerose citazioni ed indicazioni storiche: ma, per la natura stessa dell'argomento, prevale, ed in molti capitoli è esclusivo, il carattere algoritmico. Particolarmente interessante il Cap. XIII, che contiene le ricerche di VON STAUDT, di CLAUSEN, di KUMMER e di numerosi altri autori sulla natura aritmetica dei numeri di BERNOULLI, uno dei punti più reconditi di questa parte dell'analisi. Terminiamo coll'indicazione che l'opera è divisa in tre parti: la prima (Cap. I-VII) contiene i preliminari e le ricerche sui polinomi formanti successioni armoniche e sui polinomi simmetrici: la seconda (Cap. VIII-XIV) studia particolarmente i numeri di BERNOULLI e quelli ad essi strettamente congiunti, detti di EULER; infine la terza (Cap. XV-XX) dà le applicazioni dei numeri di BERNOULLI a varie parti della teoria dei numeri, come la determinazione delle somme di potenze, argomento apparentemente elementare ma che si connette a questioni di estrema difficoltà, la ricerca dei coefficienti dei fattoriali e la teoria dei residui quadratici. Riassumendo, non diremo che il libro di NIELSEN sia di quelli che si possono leggere di seguito, nè che vi aleggi un alto spirito di sintesi: ma è una raccolta preziosa di risultati, e un tale libro non può mancare in una biblioteca matematica di qualche importanza.

s. p.

K. GRELLING: *Mengenlehre.* Mathematisch-Physikalische Bibliothek. Bd. 58, 8° piccolo, pag. 49, B. G. Teubner, Berlin, 1924. (G. M. 0,80).

Contiene una esposizione elementare, estremamente succinta, dei principi della teoria degli Aggregati.

Dopo una brevissima introduzione storica, ed alcuni preliminari chiarimenti sul concetto di *aggregato*, si dà la definizione di *potenza* di un aggregato, si espongono i caratteri distintivi degli *aggregati finiti*; fra gli infiniti si distinguono gli aggregati *numerabili* ed i *non numerabili* e dopo aver accennato ai *Tipi d' ordine*, si espongono le più note *antinomie della teoria degli aggregati.*

ETTORE BORTOLOTTI

H. ROTHE: *Höhere Mathematik.* Theil I. *Differentialrechnung und Grundformeln der Integralrechnung nebst Anwendungen.* Teubners technische Leitfaden, Bd. 21, 8° piccolo, pag. 185, B. G. Teubner, Berlin 1925 (G. M. 5).

Sono svolgimenti delle lezioni date dall' A. nelle Techn. Hochschule di Berlino; contengono la materia degli ordinari corsi di Calcolo infinitesimale dati nel 1° biennio delle nostre Facoltà, completata con una breve introduzione alla *Teoria delle funzioni di variabile complessa* ed alla *Rappresentazione conforme.*

Sono notevoli la brevità, spesso troppo schematica, della esposizione, la molteplicità degli esempi, delle applicazioni, degli esercizi, la nitida veste tipografica, che ha permesso di racchiudere in un volumetto di piccolo formato una grande mole di materia, e che fa, a colpo d' occhio, rilevare i punti più importanti, le formule notevoli, i capisaldi degli sviluppi nelle diverse teorie.

ETTORE BORTOLOTTI