FRANCESCO CECIONI

Notizie sopra alcuni recenti lavori sulla teoria delle Algebre associative

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **4** (1925), n.2, p. 77–85.

Unione Matematica Italiana

¡http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1925_1_4_2_77_0¿

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 1925.

RELAZIONI SCIENTIFICHE

Conformemente alla deliberazione dell' Assemblea dei Soci del 20 Dicembre 1924, iniziamo la Rubrica « Relazioni Scientifiche » *con un articolo del Ch.*^{mo} *prof.* E. CECIONI *su un argomento importante ed interessante, attualmente oggetto di studi da parte di distinti scienziati nostri e stranieri, la teoria generale delle Algebre associative. Non dubitiamo che i Soci accoglieranno con favore la nuova Rubrica, alla quale speriamo vogliano contribuire con volonterosa ed efficace collaborazione.*

LA REDAZIONE

Notizie sopra alcuni recenti lavori sulla teoria delle Algebre associative.

1. È noto come, nei lavori non recenti, vengono introdotti i *sistemi di numeri complessi ad n unità*, o (secondo la nomenclatura ora più in uso) le ***algebre lineari associative***: si assumono n unità indipendenti $e_1, e_2, \ldots, e_n$ (***base*** **dell' algebra**) legate fra loro da certe *formule di moltiplicazione*

$$e_i e_k = \Sigma\gamma_{iks} e_s,$$

le γ_{iks} essendo costanti reali o complesse (usuali); il numero generico dell' algebra è allora $\Sigma x_i e_i$, le x_i (*coordinate del numero*) essendo variabili arbitrarie nel campo reale (algebre a coordinate reali, o, senz' altro, *algebre reali*), o nel campo complesso usuale (*algebre complesse*). Si noti che dicendo semplicemente *algebra* deve intendersi *algebra lineare* ***associativa.*** Sono pure comunemente note, oltre le prime proprietà, alcune altre, come ad es. la seguente: Un' algebra (a coordinate reali o complesse) nella quale valgano *tutte* le proprietà formali dell' aritmetica comune (inclusa la proprietà dell' annullamento del prodotto) è equivalente o al campo dei numeri reali o al campo dei numeri complessi usuali (GAUSS, WEIERSTRASS). Per questa ragione appunto nello studio delle algebre si lasciano cadere alcune delle dette proprietà e precisamente non si richiede che valgano la proprietà commutativa del prodotto nè quella dell' annullamento del prodotto stesso; si mantiene invece la proprietà associativa [1] (del prodotto), in analogia a ciò che accade nella teoria dei gruppi ed in quella delle matrici (sostituzioni lineari), argomenti che col presente si mostrano connessi.

Un' altra proprietà ben nota è pure la seguente: Un'algebra reale o complessa priva di divisori dello zero (cioè, come dicesi seguendo WEDDERBURN [2], *primitiva* è equivalente o all'algebra dei numeri reali, o a quella dei numeri complessi usuali, o a quella dei quaternioni reali (FROBENIUS).

Non è invece ancora molto noto lo sviluppo che ha ormai raggiunto la teoria generale delle algebre. Tale teoria è stata di recente coordinata, ed in molti e notevoli punti perfezionata e fatta progredire, dallo SCORZA, che la ha esposta, anche con intento didattico, nel suo bel trattato: *Corpi numerici ed algebre* [3]; onde chi se ne voglia render padrone non ha più da cercare faticosamente nelle Memorie originali, che sono numerosissime e condotte da svariati punti di vista. In questo articolo mi propongo di dare un cenno del modo nel quale oggi è prospettata e svolta tale teoria, prendendo come guida il suddetto trattato dello SCORZA; ed accennerò anche ad alcuni più recenti lavori sull' argomento.

2. In luogo di considerare algebre a coordinate reali o complesse, si considerano ora algebre con le coordinate in un *campo di razionalità,* o *corpo numerico,* arbitrariamente dato, seguendo TABER e DICKSON che primi si posero da questo punto di vista. Ciò è di notevole importanza. Ad es. le algebre che lo SCORZA ha con successo applicate allo studio delle matrici di RIEMANN [4] sono appunto algebre a coordinate razionali. I corpi algebrici finiti della teoria dei numeri algebrici (da non confondersi coi corpi numerici finiti dei quali parleremo fra breve) si possono riguar-

(1) Sono state studiate anche algebre *non associative*, ma la teoria di esse è attualmente assai lontana dall' importanza che ha quella delle algebre associative; di queste ultime solamente sarà parlato nel presente articolo. Così pure non farò alcun cenno delle algebre prive di una base finita, lo studio delle quali è stato recentissimamente iniziato da WEDDERBURN [Trans. of the Am. Math. Society, vol. XXVI (1924), pp. 395-426].

(2) Il DICKSON chiama *division-algebras* le algebre primitive.

(3) Principato, Messina, 1921. In questo libro può vedersi anche una copiosa bibliografia sull' argomento.

(4) G. SCORZA, *Le algebre di ordine qualunque e le matrici di Riemann*, Rend. Circolo Matem. di Palermo, t. XLV (1921).

dare come algebre (commutative e primitive) a coordinate razionali [5].

DICKSON, HUNTINGTON, ed altri si proposero di caratterizzare il concetto di *corpo numerico* mediante un gruppo di proprietà fondamentali (postulati). Lo SCORZA, nella prima parte del suo trattato, riassume e completa queste ricerche. Il gruppo fondamentale di postulati contiene le proprietà formali dell'addizione e della moltiplicazione, e le proprietà degli elementi 0 ed 1 (incluse quelle relative alla possibilità delle operazioni inverse). Queste proprietà, che sole definiscono il concetto di *corpo numerico*, danno però a questo concetto (come ora accennerò) un contenuto diverso da quello che comunemente si intendeva di rappresentare con le parole *campo di razionalità*; ad es. le *classi* (mod. p), p primo, formano un corpo numerico. Se si considerano in un corpo numerico qualunque i numeri

$$\ldots u_{-1} = -1, \quad u_0 = 0, \quad u_1 = 1, \quad u_2 = 1 + 1, \ldots$$

($-a$ è definito da $a + (-a) = 0$), il corpo numerico generato operando su essi con le quattro operazioni fondamentali chiamasi *sottocorpo fondamentale* del corpo numerico dato; si dimostra che esso è isomorfo o al corpo dei comuni numeri razionali, o al corpo delle classi (mod. p). I corpi numerici possono essere finiti, infiniti con sottocorpo fondamentale finito, infiniti con sottocorpo fondamentale infinito. Sono questi ultimi che corrispondono al concetto tradizionale di campo di razionalità.

Le proprietà algebriche di queste varie specie di corpi numerici sono in molta parte uguali, ma si verificano anche, da una specie all'altra, divergenze notevoli.

Non è qui possibile entrare in maggiori particolari; accennerò solo che i teoremi di identità delle funzioni razionali intere non valgono, nella forma consueta, in un corpo finito; questo fatto porta che lo svolgimento della teoria dei polinomi, delle espressioni frazionarie, ecc., coi coefficienti in un corpo numerico qualunque, va condotta in modo puramente formale: le variabili sono sostituite da *indeterminate*; i polinomi non hanno *valore*, ma sono pure *forme*.

(5) È vero anche (SCORZA, libro cit., p. 404) il teorema inverso, cioè ogni algebra razionale primitiva e commutativa è potenziale (ossia ha una base della forma $1, \alpha, \alpha^2, \ldots \alpha^{n-1}$). — DICKSON ha iniziato lo studio dell'aritmetica delle algebre a coordinate razionali, argomento che comprende come caso particolare la teoria dei numeri algebrici. (Vedasi, ad es., DICKSON, *Algebras and their Arithmetics*, University of Chicago Press, 1923).

Come altro esempio noterò che nei corpi numerici (finiti o no), il cui sottocorpo fondamentale è isomorfo a quello delle classi (mod. 2), ogni numero è uguale al suo contrario.

Aggiungiamo pure che i corpi finiti sono stati tutti pienamente determinati (SCORZA, libro cit., p. 123).

3. Passiamo ora alle algebre, *definite in un dato corpo numerico qualunque.*

In conformità dello scopo di questo articolo, che è quello di dare una idea del modo col quale è svolta la teoria delle algebre secondo i più recenti lavori, ed anche per ragioni di brevità, non farò cenno dei lavori (PEIRCE, CAYLEY, STUDY, SCHEFFERS, MOLIEN, CARTAN, FROBENIUS, ecc.) che consideravano solo algebre nel campo reale o complesso: e ciò tanto più che tutte le proprietà fondamentali delle algebre reali o complesse si possono dedurre (v. il trattato dello SCORZA) dalla odierna teoria generale. Chi volesse avere una idea dello svolgimento diretto della teoria delle algebre complesse, senza ricorso ai metodi più recenti, può vedere la Memoria (contenente anche assai indicazioni bibliografiche) di J. A. SCHOUTEN, *Zur Klassifizierung der assoziativen Zahlensysteme* (Math. Annalen, Bd. 76, 1915), nella qual Memoria sono portati a detta teoria anche complementi notevoli, come ad es. il Teor. IX, che si deduce poi anch'esso dai recenti sviluppi generali.

Consideriamo dunque un corpo numerico qualsivoglia. Le algebre in questo corpo vengono, nei recenti lavori, definite assumendo le proprietà formali dell'addizione, della moltiplicazione di un elemento dell'algebra per un numero del campo, e della moltiplicazione di due elementi dell'algebra (esclusa la proprietà commutativa di quest'ultima moltiplicazione), ed imponendo poi la condizione che gli elementi di un'algebra formino una totalità lineare ad un numero finito di dimensioni.

Gli elementi di un'algebra risultano così formare simultaneamente un gruppo ed un sistema lineare. Perciò con vari metodi si possono studiare le proprietà delle algebre, sia mettendo in particolare rilievo la loro qualità di gruppi, sia invece la loro qualità di sistemi lineari. WEDDERBURN (6) ha trovato un metodo, *il calcolo dei sistemi*, che tiene conto di ambedue le condizioni, e sembra perciò uno dei metodi più atti specialmente alla investi-

(6) *On hypercomplex numbers*, Proceedings of the London Mathematical Society, s. 2, vol. 6 (1908), pp. 77-117.

gazione delle proprietà generali delle algebre. Tale metodo è seguito dallo SCORZA nel suo trattato.

Chiamasi *sistema* (così SCORZA traduce la parola *complex* di WEDDERBURN) l'insieme delle combinazioni lineari (con coefficienti numerici) di più elementi di un'algebra; chiamasi *somma* di due sistemi S e T il sistema di minimo ordine (dimensione) che contiene S e T; chiamasi *prodotto* di S per T il sistema di ordine minimo che contiene tutti i prodotti di ciascun elemento di S per ciascun elemento di T. Sulla base di queste, e di altre opportune definizioni e notazioni, si fonda il suaccennato calcolo dei sistemi, il quale serve da solo a stabilire parecchie importanti proprietà delle algebre.

Per lo studio di altre proprietà occorre valersi anche delle coordinate dell'elemento di un'algebra rispetto ad una data base, e vedere quindi che la definizione tradizionale di algebre ad n unità coincide con quella data sopra. La trattazione di tale argomento discende con facilità dalla definizione di algebra con l'aiuto del calcolo delle matrici, e si trova così il teorema di C. S. PEIRCE secondo il quale un'algebra qualunque di ordine n può essere rappresentata mediante un sistema lineare di matrici quadrate di ordine $n+1$, o anche, se l'algebra è dotata di modulo (unità principale [7]), di ordine n.

Riguardo ai risultati ottenuti, accennerò solo ad alcuni, non potendo naturalmente farne qui un quadro completo; e prescinderò, in questo cenno, dall'ordine logico di deduzione.

Si mostra di notevole importanza lo studio degli *automoduli* (elementi $u \neq 0$ pei quali è $u^2 = u$) [8], che sempre esistono in un'algebra, purchè non sia pseudonulla [9]. Ad es., dato un auto-

(7) Chiamasi *modulo* od *unità principale*, un elemento u dell'algebra, tale che per *qualunque* elemento x dell'algebra stessa si abbia $ux = xu = x$. Si dimostra che un'algebra o non ammette alcun modulo o ne ammette uno solo.

(8) B. PEIRCE e gli altri autori americani ed inglesi, seguiti anche da altri, chiamano elemento *idempotent* un automodulo. FROBENIUS chiama *unità* (*Einheit*) un tale elemento, chiamando invece *Grundzahlen* quelli che comunemente si chiamano le unità (di una base). Il termine *automodulo* è dello SCORZA.

(9) Le algebre *pseudonulle* risultano quelle, gli elementi delle quali sono *radici dello zero* (cioè soddisfano ad un'equazione del tipo $x^k = 0$, con k intero e positivo); anche tali elementi si dicono *pseudonulli*. La denominazione è del CARTAN. Dagli autori americani ed inglesi è usato, in ugual senso, l'aggettivo *nilpotent*. FROBENIUS chiama, senz'altro, *Wurzel der Null* un elemento pseudonullo, e *Wurzel-gruppe* un'algebra pseudonulla.

modulo, l'algebra può pensarsi come somma di quattro sistemi (di PEIRCE), la tabella di moltiplicazione dei quali è particolarmente semplice; il che corrisponde alla possibilità di scegliere una base dell'algebra con parecchie costanti di moltiplicazione nulle. Dallo studio degli automoduli lo SCORZA ha potuto ricavare notevoli proprietà delle algebre con modulo, estendendo anche alcune proprietà relative alla scelta della base, che SCHEFFERS e CARTAN avevano trovato nel campo complesso.

Si ha per le algebre una teoria della composizione (serie di composizione, ecc.), analoga a quella della composizione dei gruppi. Qui citerò solo il seguente teorema: Data un'algebra non semisemplice (10) e non pseudonulla, l'algebra complementare della sua sotto-algebra eccezionale è un'algebra semi-semplice, che non è certo una zero-algebra di ordine 1. Questo teorema mette in evidenza l'importanza che hanno, nello studio della struttura di un'algebra, le algebre pseudonulle e le algebre semi-semplici.

Per le algebre pseudonulle si ha un teorema di WEDDERBURN (che generalizza e precisa uno dello SCHEFFERS) che assegna una opportuna e semplice scelta della base.

Per le algebre semi-semplici si dimostra che esse risultano somma diretta (11) di algebre semplici (12), che non sono zero-al-

(10) Si hanno le seguenti definizioni:

Una sottoalgebra B di un'algebra A si dice *invariante* in A quando ciascuno dei prodotti AB, BA (prodotti di sistemi) è contenuto in B.

Un'algebra si dice *semi-semplice* quando è priva di sottoalgebre invarianti pseudonulle.

Sottoalgebra *eccezionale* di un'algebra (non semi-semplice) è la sua sottoalgebra invariante pseudonulla di ordine massimo (si dimostra che essa è unica).

Una *zero-algebra* è un'algebra nella quale tutti i prodotti sono nulli.

Data un'algebra A, ed una sua sottoalgebra B invariante *propria* (cioè distinta da A) il concetto di *algebra complementare* di B rispetto ad A si stabilisce in modo analogo a quello di *gruppo complementare* nella teoria dei gruppi, partendo dal concetto che due elementi x ed y di un'algebra si dicono equivalenti, o congrui, rispetto ad un sistema S dell'algebra stessa, quando $x-y$ appartiene ad S. La detta algebra complementare è chiamata da MOLIEN *ein begleitendes Zahlensystem* dell'algebra A.

(11) Un sistema si dice *somma diretta* di più sistemi S_i se è somma di essi, ed inoltre il suo ordine è la somma degli ordini degli S_i, e si ha $S_iS_j=0 \ (i \neq j)$.

(12) Sono le algebre prive di sottoalgebre invarianti proprie. Un'algebra semplice (dotata di modulo, nel corpo complesso) è detta da MOLIEN *ein ursprüngliches Zahlensystem*.

gebre di ordine 1 (WEDDERBURN); le algebre semplici (escluse le zero-algebre di ordine 1) risultano i prodotti diretti [13] di un' algebra primitiva e di un' algebra regolare [14] (WEDDERBURN), e tale scomposizione è unica di fronte alla relazione di equivalenza fra algebre (SCORZA). Si vede quindi la grande importanza che hanno, per lo studio generale delle algebre, le algebre primitive.

Come applicazione della teoria generale si ritrovano le proprietà, molteplici e notevoli, delle algebre complesse e reali, nonchè le proprietà delle algebre razionali e specialmente delle algebre razionali primitive, dalle quali, ad es., può dedursi il noto teorema sui numeri algebrici che ogni corpo algebrico di grado n possiede numeri pure di grado n.

4. Delle algebre primitive, l' importanza delle quali è stata testè rilevata, sono note alcune proprietà generali [15]; ma per quanto concerne la effettiva determinazione di tali algebre, definite in un corpo numerico arbitrario [16], pochi risultati sono stati ottenuti.

Le algebre primitive e commutative sono, manifestamente, dei corpi numerici, e perciò non presentano particolare interesse. WEDDERBURN [17] ha determinato tutte le algebre primitive in un corpo finito, le quali sono tutte commutative, e perciò corpi numerici finiti esse stesse. Le algebre primitive, il cui ordine è un numero primo, sono pure tutte commutative, qualunque sia il corpo numerico nel quale sono definite (SCORZA, libro cit., p. 329).

Il problema è dunque quello di determinare le algebre primitive, non commutative, in un corpo numerico infinito.

[13] Un sistema si dice *prodotto diretto* di due sistemi U e V quando è il prodotto di questi sistemi ed inoltre il suo ordine è il prodotto degli ordini di U e V, ed ogni elemento di U è permutabile con ogni elemento di V.

[14] Chiamasi *regolare* un' algebra, di ordine n^2, isomorfa a quella costituita dalle matrici quadrate di ordine n. La denominazione è dello SCORZA. Queste algebre sono chiamate *quadrate* o *simple matric algebras* dallo WEDDERBURN, *matric algebras* dal DICKSON, *p^2-ioni* dal SYLVESTER e dal CARTAN, ecc.

[15] Vedasi il citato trattato di SCORZA, e la Memoria di WEDDERBURN, *On division Algebras*, Transactions of the American Mathematical Society, vol. XXII (1921), pp. 129-135.

[16] Nel corpo reale o complesso la questione è risoluta completamente dal noto teorema di FROBENIUS citato al n. 1.

[17] *On a theorem on finite algebras*, Trans. of the Am. Math. Society, vol. VI (1905), pp. 349-352. V. anche SCORZA, libro cit., pp. 450-454.

Il DICKSON [18] ha trovato un tipo di tali algebre, studiato poi anche da WEDDERBURN [19], il quale tipo può, come ha notato WEDDERBURN, essere definito nel modo seguente: *Algebre primitive in un dato campo di razionalità* [20] K, *l'ordine delle quali è un quadrato perfetto* n^2, *che contengono un elemento* i *la cui equazione minima* [21] *è un' equazione abeliana* **ciclica** *di grado* n

$$f(i) = 0$$

coi coefficienti in K (ed irriducibile in K). L'esistenza di tali algebre è stata stabilita da DICKSON per $n = 2$, $n = 3$ e da WEDDERBURN per n qualunque. Per $n = 2$ esse rappresentano la generalizzazione ad un corpo qualunque dell'algebra dei quaternioni. Per $n = 2$, $n = 3$ esse sono le uniche algebre primitive (non commutative) dei rispettivi ordini 4 e 9 (notevole teorema di WEDDERBURN).

Per $n > 3$, partendo da una proprietà notata da WEDDERBURN, e studiando (con l'aiuto di una opportuna rappresentazione per mezzo di matrici) le proprietà di certi tipi analoghi di algebre (non primitive), ho potuto mostrare, con un esempio per $n = 4$, la possibilità di un altro tipo di algebre primitive, tipo analogo a quello di DICKSON, ma con l'equazione $f(i) = 0$ abeliana **non ciclica** [22].

Un terzo tipo di algebre primitive è costituito da certe algebre di ordine 8, trovate da DICKSON, le quali si riducono alla

(18) *Linear associative algebras and abelian equations*, Trans. of the Am. Math. Society, vol. XV (1914), pp. 31-46.

(19) *A type of primitive Algebra*, Trans. of the Am. Math. Soc., vol. XV (1914), pp. 162-166. *On division Algebras*, Trans. of the Am. Math. Soc., vol. XXII (1921), pp. 129-135.

(20) Deve intendersi precisamente: corpo numerico con sottocorpo fondamentale infinito.

(21) Cioè l'equazione $x^k + \alpha_1 x^{k-1} + \ldots + \alpha_{k-1} x + \alpha_k = 0$ (coi coefficienti in K), di grado minimo, per la quale si ha $i^k + \alpha_1 i^{k-1} + \ldots + \alpha_{k-1} i + \alpha_k u = 0$, u essendo il modulo dell'algebra. L'equazione minima si può opportunamente definire per ciascun elemento non nullo, divisore o no dello zero, di qualunque algebra, dotata o no di modulo (in un'algebra priva di modulo ogni elemento non nullo è un divisore dello zero). Tale equazione è chiamata da WEDDERBURN *identical equation*; per il caso delle algebre complesse dotate di modulo, è chiamata *Ranggleichung* dal MOLIEN, e *equazione caratteristica* dallo SCHEFFERS e da altri.

(22) *Sopra un tipo di algebre prive di divisori dello zero*, Rend. Circolo Matem. Palermo, t. XLVII (1923), pp. 209-254.

algebra di DICKSON di 4° ordine estendendo convenientemente il corpo numerico nel quale le algebre stesse sono definite.

Che io sappia, nessun altro tipo di algebre primitive è conosciuto.

5. Nelle prime ricerche sulle algebre in un corpo reale o complesso furono determinati tutti i tipi di algebre di ordine n, non equivalenti, per $n \leq 6$, ed in alcuni casi anche per $n = 7$ (B. PEIRCE, CAYLEY, STUDY, SCHEFFERS, HAWKES, ecc.). Questo importante argomento è stato testè ripreso dallo SCORZA, considerando algebre definite in un corpo qualunque. Con l'uso dei progressi più recenti della teoria generale delle algebre, egli ha determinato tutti i tipi possibili di *algebre doppie* (cioè con $n = 2$) in un corpo arbitrario ([23]); ha studiato anche alcune loro proprietà, e si è fermato in particolare sulle algebre doppie primitive (che sono, come sappiamo, particolari corpi numerici), le quali non esistono però in qualsiasi corpo numerico: non esistono, ad es., nel corpo complesso.

A quest'ordine di ricerche si riattacca il recente lavoro di DICKSON, *The rational linear algebras of maximum and minimum Ranks* (Proceedings of the London Math. Soc., 1923). Egli considera solo le algebre definite nel campo razionale (l'importanza del qual campo è già stata posta in rilievo al n. 2), e dotate di modulo; procedendo con metodo elementare, senza adoperare i recenti sviluppi della teoria generale delle algebre, egli determina tutte le dette algebre irriducibili (poichè a queste ci si può sempre ricondurre) di ordine n, ed aventi il rango ([24]) n o il rango 2, assegnando per ciascuna di esse una opportuna base. Per le algebre di rango n vi è sempre una base del tipo $(1, e, e^2, ..., e^{n-1})$, onde il problema è semplicemente quello di distinguere l'algebra riducibile dalla irriducibile. Egli applica poi la teoria così svolta alla determinazione di tutte le algebre razionali (con modulo) non equivalenti, in 2, 3, 4 unità.

Livorno, gennaio 1925.

FRANCESCO CECIONI

(23) G. SCORZA, *Le algebre doppie*, Rend. della R. Accademia delle Scienze Fisiche e Matem. di Napoli, 1922, pp. 65-79.

(24) Rango di un'algebra (dotata di modulo) è il massimo grado delle equazioni minime cui soddisfano i singoli elementi dell'algebra.