
BOLLETTINO UNIONE MATEMATICA ITALIANA

GIUSEPPE MARLETTA

Preliminari di una Geometria metrica ad infinite dimensioni

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1,
Vol. 4 (1925), n.2, p. 65–71.

Unione Matematica Italiana

[http:
//www.bdim.eu/item?id=BUMI_1925_1_4_2_65_0](http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1925_1_4_2_65_0)

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione
Matematica Italiana, 1925.

Preliminari di una Geometria metrica ad infinite dimensioni.

Nota di GIUSEPPE MARILETTA

Gli spazi lineari non iperspazi sono stati da me chiamati *ultraspazi* ⁽¹⁾. In questa Nota, come in altro mio lavoro ⁽²⁾, assumo come « punto » una successione (infinita) di ordinari numeri complessi. Distinguo i punti in « propri » e « impropri », questi ultimi in due specie. Si vedrà che i punti propri insieme con i punti impropri di 1^a specie appartenenti a rette proprie, costituiscono un ultraspazio a rango infinito; mentre tutti i punti impropri di 1^a specie costituiscono un ultrapiano. Definisco la « distanza » fra due punti, assegnando la condizione necessaria e sufficiente affinché essa sia *finita* pur essendo i punti *ambidue all'infinito*. Accenno infine alle « rette parallele », e ad un teorema che, in effetti, afferma l'eguaglianza dei lati opposti di un parallelogrammo, sia pure questo a vertici impropri.

1. Chiameremo *punto* una qualunque successione (infinita) di ordinari numeri complessi $x_1, x_2, x_3, \dots$, finiti e non tutti nulli, da chiamare le coordinate del punto, ritenendo come *coincidenti* due punti ogni qual volta le coordinate dell'uno si ottengano moltiplicando tutte quelle dell'altro per uno stesso numero (finito, non nullo). Due punti non coincidenti si diranno *distinti*. Un punto si dirà *reale* o *immaginario* secondo che le sue coordinate sono ovvero no tutte reali. Il punto O di coordinate tutte nulle eccettuata la x_1 sarà chiamato *origine*. La figura di tutti i punti si dirà *ambiente assoluto*, e sarà indicata con S_{-0} .

2. Un punto P di coordinate x_1 e x_r ($r = 2, 3, \dots$) si dirà *proprio* o *al finito* (rispetto all'origine), se la serie $\sum \left| \frac{x_r}{x_1} \right|^2$ è convergente; si dirà *improprio* o *all'infinito* se non è proprio. Si osservi dunque che se P è un punto proprio, si ha $|x_1| \neq 0$ e $\sum |x_r|^2$ con-

⁽¹⁾ Cfr. il mio *Saggio di Geometria ad infinite dimensioni*. (Atti dell'Accademia Gioenia, Catania, serie 5^a, vol. X 1916), e i miei *Preliminari di Geometria Proiettiva ad infinite dimensioni*. (Atti del R. Istituto Veneto 1917). In questo secondo lavoro gli ultraspazi sono ad un numero infinito non numerabile di dimensioni.

⁽²⁾ *Geometria ad infinite dimensioni*. (Atti dell'Accademia Gioenia, Catania, serie 5^a, vol. XIV 1924).

vergente, e viceversa; inoltre sarà $\lim_{r \rightarrow \infty} |x_r|^2 = 0$ e quindi anche $\lim_{r \rightarrow \infty} |x_r| = 0$.

3. Un punto improprio si dirà di 1^a o di 2^a specie, secondo che per esso è o no $x_1 = 0$.

4. Dati $n + 1$ punti *indipendenti*, cioè tali che ciascuno di essi abbia le sue coordinate non combinazioni lineari delle omonime dei rimanenti n punti, chiameremo *spazio ad n dimensioni*, e l'indicheremo con S_n , la figura dei punti ciascuno dei quali ha le sue coordinate combinazioni lineari delle coordinate omonime degli $n + 1$ punti dati. Ogni S_n (n finito) si suol chiamare *iperspazio*, ed è individuato da $n + 1$ qualunque suoi punti indipendenti. L' S_1 dicesi *retta*.

5. Consideriamo la retta PQ .

a) I punti P e Q siano ambedue impropri di 1^a specie (n.° 3). È evidente che i punti della retta PQ sono tutti impropri di 1^a specie.

b) I punti P e Q siano ambedue propri. Scegliendo i parametri λ e μ in modo che sia $\lambda x_1 + \mu y_1 = 0$, si ottiene il punto improprio di 1^a specie della retta PQ . Per ogni altra coppia di valori, per λ e μ , si ottiene un punto proprio: infatti dall'identità $(|x_r| - |y_r|)^2 \geq 0$ si deduce $|x_r|^2 + |y_r|^2 \geq 2|x_r y_r|$. Ma per ipotesi sono convergenti (n.° 2) le serie $\sum |x_r|^2$ e $\sum |y_r|^2$, quindi anche la serie $\sum |x_r y_r|$ è convergente. Ne segue che convergente è la serie $\sum (\lambda x_r + \mu y_r)^2$, e a più forte ragione la serie $\sum |\lambda x_r + \mu y_r|$, onde (n.° 2) qualunque altro punto della retta PQ è proprio.

c) Siano P proprio e Q improprio di 2^a specie. Anche ora, come in b), nella retta PQ troviamo un punto improprio di 1^a specie; tutti gli altri punti di PQ sono impropri di 2^a specie.

d) Il punto P sia proprio; Q improprio di 1^a specie. Per a) nella retta PQ non esiste alcun altro punto improprio di 1^a specie. Se poi M è un altro punto proprio della retta PQ , allora si ritrova il caso b); se invece M è un punto improprio di 2^a specie, si ritrova il caso c).

e) Siano ora P e Q impropri rispettivamente di 2^a e 1^a specie. Nella retta PQ può esistere un punto proprio, ritrovando così il caso c). Ma questo punto proprio può mancare, e, quindi, essere impropri di 2^a specie tutti gli altri punti della retta PQ . Basta infatti che il $\lim_{r \rightarrow \infty} |y_r|$ sia finito, ma sia $\lim_{r \rightarrow \infty} |x_r| = \infty$; invero in tale ipotesi sarà $\lim_{r \rightarrow \infty} |\lambda x_r + \mu y_r| = \infty$, qualunque siano i valori (finiti)

di λ e μ , e quindi (n.° 2) il punto di coordinate $\lambda x_r + \mu y_r$, non è proprio.

f) Se, infine, i punti P e Q sono ambedue impropri di 2ª specie, si dimostra, come in $b)$, che nella retta PQ esiste un punto improprio di 1ª specie, e quindi si ritrova il caso precedente.

6. I risultati del n.° 5 si possono compendiare tutti nel seguente teorema: *Se una retta non è luogo di punti impropri di 1ª specie, in essa esiste uno ed uno solo di siffatti punti. I rimanenti punti della retta saranno tutti propri, ovvero tutti impropri di 2ª specie eccettuato eventualmente uno solo che sarà proprio.*

7. Una retta si dirà *propria, impropria di 1ª specie, impropria di 2ª specie*, secondo che essa ha due punti propri, ovvero due punti impropri di 1ª specie, o, infine, un punto improprio di 2ª specie. Come siano i rimanenti punti della retta segue dal n.° precedente.

I punti impropri di 1ª specie appartenenti (n.° 6) a rette proprie, si diranno *notevoli*. Per ognuno di essi è (n.° 5, b) dunque: $x_1 = 0$ e $\sum |x_r|^2$ serie convergente; e viceversa. Sarà di conseguenza $\lim_{r \rightarrow \infty} |x_r| = 0$; insomma: le coordinate di un punto improprio notevole si comportano come quelle dei punti propri (n.° 2), eccettuata, s'intende, la prima.

8. Chiameremo *ultraspazio* ogni figura lineare che non sia un iperspazio (n.° 4). Un ultraspazio si dirà *a rango finito* r ⁽³⁾, e sarà indicato con S_{-r} , se il numero finito r è tale che ogni S_r ha almeno un punto in esso ultraspazio, e inoltre esiste qualche S_r che ha, col detto ultraspazio, un solo punto comune. Se, invece, qualunque sia r esiste qualche S_r non avente alcun punto nel dato ultraspazio, allora questo si dirà *a rango infinito*.

Gli ultraspazi S_{-r-1} di un S_{-r} saranno gli *ultrapiani* di questo.

9. — Che la figura di tutti i punti impropri di 1ª specie sia un S_{-1} , segue senz'altro dalla prima parte del teorema del n.° 6. Dimostreremo ora che la figura S costituita dai punti propri e dai punti impropri notevoli (n.° 7), è un ultraspazio a rango infinito (n.° 8).

E invero S è una figura lineare in virtù di quanto si disse nel n.° 5 b e nella conclusione del n.° 7. Consideriamo ora, p. es., gli $n+1$ punti (indipendenti) di coordinata r^{esima} rispettivamente

(3) Cfr. i numeri 5 e 6 del secondo dei miei lavori citati in (4).

$r, r^2, \dots, r^{n-1}, r^{n+1}$, e sia S_n l'iperspazio da essi individuato. Essendo $\lim_{r \rightarrow \infty} |\lambda r + \mu r^2 + \dots + \nu r^{n+1}| = \infty$, qualunque siano i valori degli $n+1$ parametri (non tutti nulli) $\lambda, \mu, \dots, \nu$, l'iperspazio S_n non ha (n.° 4, 2 e 7) alcun punto nella figura S . Concludendo (n.° 8):

Il luogo dei punti impropri di 1ª specie è un ultrapiano S_{-1} ; il luogo dei punti propri e impropri notevoli è un ultraspazio S a rango infinito (4).

10. La visione, dirò così, intuitiva della Geometria che trattiamo è dunque questa: In un ultraspazio, ambiente assoluto S_{-0} , si consideri un ultrapiano S_{-1} e un ultraspazio a rango infinito S , non contenuto in questo; si indichi con S' l'intersezione di S_{-1} con S . Si dicano: « propri » i punti di S non appartenenti ad S' ; « impropri di 1ª specie » i punti di S_{-1} ; « impropri di 2ª specie » tutti i rimanenti punti dell' S_{-0} , cioè quei punti che non appartengono ad S_{-1} , nè ad S . Si osservi che S' è il luogo dei punti impropri notevoli (n.° 7).

11. Siano P e Q due punti propri rispettivamente di coordinate x_r e y_r . Dall'identità

$$\left(\left| \frac{x_r}{x_1} \right| - \left| \frac{y_r}{y_1} \right| \right)^2 \geq 0 \text{ si deduce } \left| \frac{x_r}{x_1} \right|^2 + \left| \frac{y_r}{y_1} \right|^2 \geq 2 \left| \frac{x_r}{x_1} \cdot \frac{y_r}{y_1} \right|;$$

ne segue che la serie $\sum 2 \left| \frac{x_r}{x_1} \cdot \frac{y_r}{y_1} \right|$ è convergente. Ma allora anche convergente è la serie $\sum \left(\left| \frac{x_r}{x_1} \right| + \left| \frac{y_r}{y_1} \right| \right)^2$. D'altra parte abbiamo

$$\left| \frac{x_r}{x_1} - \frac{y_r}{y_1} \right| \leq \left| \frac{x_r}{x_1} \right| + \left| \frac{y_r}{y_1} \right|, \text{ e quindi } \left| \frac{x_r}{x_1} - \frac{y_r}{y_1} \right|^2 \leq \left(\left| \frac{x_r}{x_1} \right| + \left| \frac{y_r}{y_1} \right| \right)^2$$

onde sarà pure convergente la serie $\sum \left| \frac{x_r}{x_1} - \frac{y_r}{y_1} \right|^2$.

12. Indicando con δ la somma della serie convergente (n.° 11) $\sum \left| \frac{x_r}{x_1} - \frac{y_r}{y_1} \right|^2$, diremo che $\delta^{\frac{1}{2}}$ è la distanza fra i due punti propri P e Q , e scriveremo $\overline{PQ} \equiv \left(\sum \left| \frac{x_r}{x_1} - \frac{y_r}{y_1} \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$.

(4) Si osservi che la figura dei punti reali (n.° 1) propri è lo spazio hilbertiano.

Si noti, in particolare, che la distanza fra il punto proprio P e l'origine O (n.° 1) è $\left(\sum \left|\frac{x_r}{x_1}\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}$ con $r > 1$.

13. Si osservi che la serie $\sum \left|\frac{x_r}{x_1} - \frac{y_r}{y_1}\right|^2$ può essere convergente anche se i punti P e Q sono ambedue impropri di 2ª specie ⁽⁵⁾, ed in tal caso acquista significato il concetto di *distanza finita* fra due punti *ambedue impropri*: essa è il numero finito $\left(\sum \left|\frac{x_r}{x_1} - \frac{y_r}{y_1}\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}$. Ma si noti che la serie $\sum \left|\frac{x_r}{x_1} - \frac{y_r}{y_1}\right|^2$ è divergente se dei due punti P e Q uno è proprio e l'altro è improprio (sia pure di 2ª specie) ⁽⁶⁾.

14. Per uniformità di linguaggio, quando la serie $\sum \left|\frac{x_r}{x_1} - \frac{y_r}{y_1}\right|^2$ è divergente, e così pure quando i punti P e Q sono ambedue impropri di 1ª specie, diremo che fra questi punti esiste una *distanza infinita* $\overline{PQ}$. Concludiamo che la *distanza fra due punti dell'ambiente assoluto* S_{-0} è finita:

- a) *sempre se i punti sono ambedue propri;*
- b) *alle volte se essi sono ambedue impropri;*
- c) *mai se di essi uno è proprio e l'altro è improprio.*

15. Sia S_1 una retta non impropria di 1ª specie (n.° 7); indicheremo con I l'unico suo punto improprio di 1ª specie (n.° 6). Se z_r è la coordinata *asimila* di I , il valore dell'espressione $\sigma_i = \frac{|z_i|}{(\sum |z_r|^2)^{\frac{1}{2}}}$, con $i > 1$, non varia ⁽⁷⁾ se le z_r si moltiplicano per uno stesso numero (diverso da zero). Si noti che per $z_i = 0$ sarà $\sigma_i = 0$, e viceversa se la serie $\sum |z_r|^2$ è convergente.

⁽⁵⁾ P. es. il punto Q abbia le sue coordinate y_r tutte reali e positive, con $y_1 > 0$, tali che la serie $\sum y_r^2$ sia divergente; il punto P abbia le coordinate $x_1 = y_1$ e, per $r > 1$, $x_r = y_r + \frac{1}{r}$. È chiaro (n.° 2) che i punti P e Q sono ambedue impropri di 2ª specie, ed è convergente la serie

$$\sum \left|\frac{x_r}{x_1} - \frac{y_r}{y_1}\right|^2 = \frac{1}{y_1^2} \sum \frac{1}{r^2}.$$

⁽⁶⁾ Si imitino le considerazioni fatte nella prima metà del n.° 11.

⁽⁷⁾ Se la serie $\sum |z_r|^2$ è divergente, a σ_i daremo il valore zero.

È ancora: se il punto improprio di 1^a specie I non è notevole, cioè (n.° 10) se la retta S_1 non incontra l'ultraspazio S' , siccome la serie $\sum |z_r|^2$ è (n.° 7) divergente, segue che i numeri τ_r sono tutti nulli. Viceversa se è così, allora, giacchè per qualche valore dell'indice i è (n.° 1) $z_i \neq 0$, sarà divergente la serie $\sum z_r^2$, e quindi (n.° 7) la retta S_1 non incontra S' . Insomma condizione necessaria e sufficiente affinchè una retta, non impropria di 1^a specie, non abbia notevole il suo punto improprio di 1^a specie, cioè non incontri ⁽⁸⁾ l'ultraspazio S' , è che i suoi numeri τ_r siano tutti nulli.

16. Siano P e Q due punti qualsivogliano della retta S_1 (n.° 15), distinti tra loro e da I ; indicheremo con x_r e y_r le loro coordinate, onde la coordinata *residua* di I è $z_r = y_1 x_r - x_1 y_r$. Se la serie $\sum z_r^2$ è convergente, tale è anche la serie $\sum \left| \frac{x_r}{x_1} - \frac{y_r}{y_1} \right|^2$; ne segue che finita sarà la distanza $\overline{PQ}$; e viceversa. Possiamo dunque concludere (n.° 7) che

a) *condizione necessaria e sufficiente affinchè sia finita la distanza fra due punti P e Q , è che nella retta PQ esista un solo punto improprio di 1^a specie, ed esso sia notevole.*

Ne segue senz'altro che

b) *se due punti di una retta hanno distanza finita, anche finita sarà la distanza fra due altri qualsivogliano punti della retta stessa* ⁽⁹⁾.

17. Servendoci della rappresentazione data nel n.° 10, il teorema a) del n.° precedente può enunciarsi dicendo che per essere finita la distanza fra due punti, occorre e basta che la loro retta incontri l'ultrapiano S_{-1} in un punto ⁽¹⁰⁾ dell'ultraspazio S' . Ritroviamo così il teorema del n.° 14 c.

18. Siano M, N, P tre punti qualunque; in virtù di una nota relazione ⁽¹¹⁾ si ha

$$\left(\sum \left| \frac{m_r}{m_1} - \frac{n_r}{n_1} \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\sum \left| \frac{m_r}{m_1} - \frac{p_r}{p_1} \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum \left| \frac{p_r}{p_1} - \frac{n_r}{n_1} \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

cioè (n.° 12) $\overline{MN} \leq \overline{MP} + \overline{PN}$.

⁽⁸⁾ Si osservi che se la retta S_1 incontra l'ultraspazio S' (n.° 10), è $\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \dots = 1$.

⁽⁹⁾ Escluso, s'intende, il punto improprio di 1^a specie.

⁽¹⁰⁾ Distinto da ciascuno di essi.

⁽¹¹⁾ RIESZ. *Les systèmes d'équations linéaires à une infinité d'inconnues* (Paris, Gauthier-Villars, 1913).

Dunque concludiamo che: *dati tre punti, la distanza fra due qualunque di essi è minore o eguale alla somma delle distanze di questi medesimi punti dal rimanente.*

19. Due rette si dicono *parallele* se nessuna di esse è impropria di 1^a specie, e se, inoltre, hanno lo stesso punto improprio di 1^a specie. È evidente che per un punto, non improprio di 1^a specie, passa (n.° 4) una ed una sola parallela ad una retta data; inoltre due rette parallele ad una terza, son parallele tra loro.

Si osservi che se è finita la distanza fra due punti di una retta, tale anche sarà (n.° 16, a) la distanza fra due (qualisivogliano) punti di una qualunque parallela a questa retta.

20. Siano X, Y, X', Y' quattro punti distinti non collineari, nessuno dei quali sia improprio di 1^a specie, e supponiamo che le rette $XY, X'Y'$ siano parallele tra loro (n.° 19), e così pure le XX', YY' siano altre due rette parallele tra loro. Indicando con x_r, y_r, x'_r, y'_r rispettivamente le coordinate di X, Y, X', Y' , e posto, come sempre si può (n.° 1), $x_1 = y_1 = x'_1 = y'_1 = 1$, le coordinate dei punti impropri di 1^a specie delle rette $XY, X'Y', XX', YY'$ son (n.° 4 e 3) rispettivamente $x_r - y_r, x'_r - y'_r, x_r - x'_r, y_r - y'_r$. Abbiamo dunque (n.° 19) $x_r - y_r = \beta(x'_r - y'_r)$ e $x_r - x'_r = \gamma(y_r - y'_r)$, essendo β e γ due costanti, non nulle, al variare dell'indice r .

Siccome le rette $X'Y'$ e YY' non son parallele, è possibile (n.° 19 e 1) trovare due valori di r , siano p. es. 2 e 3, tali che non sia $\frac{x'_2 - y'_2}{y_2 - y'_2} = \frac{x'_3 - y'_3}{y_3 - y'_3}$. Ed ora è facile dedurre il sistema

$$\begin{cases} \beta(x'_2 - y'_2) - \gamma(y_2 - y'_2) = x'_2 - y_2 \\ \beta(x'_3 - y'_3) - \gamma(y_3 - y'_3) = x'_3 - y_3 \end{cases}$$

per cui $\beta = \gamma = 1$. Ne segue (n.° 12, 13 e 14) $\overline{XY} = \overline{X'Y'}$ e $\overline{XX'} = \overline{YY'}$; concludendo:

Se X, Y, X', Y' sono quattro punti distinti, non collineari, non impropri di 1^a specie, e se le rette $XY, X'Y'$ sono parallele, come pure parallele le rette XX', YY' , si ha sempre $\overline{XY} = \overline{X'Y'}$ e $\overline{XX'} = \overline{YY'}$.

Catania, settembre 1924.