BOLLETTINO
UNIONE MATEMATICA
ITALIANA

PAOLO BONANNO

Applicazione del secondo principio di reciprocità ai sistemi elastici vibranti

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **4** (1925), n.2, p. 57–60.

Unione Matematica Italiana

¡http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1925_1_4_2_57_0¿

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 1925.

Applicazione del secondo principio di reciprocità ai sistemi elastici vibranti.

Nota di Paolo Bonanno

1. In una mia recente Nota [1] sono pervenuto al seguente risultato. Abbiasi un corpo elastico, occupante uno spazio V più volte connesso e limitato dalla superficie S, in equilibrio dinamico sotto l'azione di date forze di massa e di tensioni superficiali. Sia σ un taglio piano, eseguito nel solido in modo da ridurne la connessione; sieno inoltre l', m', n', p', q', r' le caratteristiche di una distorsione di Volterra, operata sulle due faccie di σ in un istante qualsiasi. Allora si ha:

$$\int_V \left[\left(X - \rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)u' + \left(Y - \rho\frac{\partial^2 v}{\partial t^3}\right)v' + \left(Z - \rho\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\right)w\right] dV +$$

$$(1) \qquad + \int_S (Lu' + Mv' + Nw')dS = -\left[l'\int_\sigma X_\nu d\sigma + m'\int_\sigma Y_\nu d\sigma + n'\int_\sigma Y_\nu d\sigma + \right.$$

$$\left. + p'\int_\sigma (yX_\nu - zY_\nu)d\sigma + q'\int_\sigma (zX_\nu - xZ_\nu)d\sigma + r'\int_\sigma (xY_\nu - yX_\nu)d\sigma\right]$$

(1) *Sul secondo principio di reciprocità*: « Bollettino della Un. Matem. Italiana », Bologna, 15 ottobre 1924.

essendo ρ la densità del corpo; X, Y, Z le componenti rispetto ad una terna d'assi, delle forze di massa riferite all'unità di volume; L, M, N quelle delle tensioni superficiali per unità d'area: u, v, w gli spostamenti elastici che ne conseguono, funzioni regolari delle coordinate x, y, z e del tempo t; X_σ, Y_σ, Z_σ le componenti, per unità d'area, delle tensioni che si trasmettono attraverso al taglio σ ed infine u', v', w' gli spostamenti elastici corrispondenti alla distorsione operata.

2. Nell'ipotesi che il sistema elastico vibri liberamente, cioè supponendo nulle le forze esterne X, Y, Z, ed L, M, N, la (1) diviene:

$$(2)\qquad \begin{aligned} &-\int \rho\left(u'\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+v'\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}+w'\frac{\partial^2 w'}{\partial t^2}\right)dV=-\\ &-\left[l'\int_\sigma X_\sigma d\sigma+\ldots+r'\int(xY_\sigma-yX_\sigma)d\sigma\right]. \end{aligned}$$

Data l'arbitrarietà delle costanti $l' \ldots r'$, assumiamole in modo che $l'=\lambda\cos\widehat{rx}$, $m'=\lambda\cos\widehat{ry}$, $n'=\lambda\cos\widehat{rx}$, $p'=\gamma\cos\widehat{rx}$, $q'=\gamma\cos\widehat{ry}$ $r'=\gamma\cos\widehat{rz}$, con λ e γ costanti piccolissime ed essendo r un asse qualsiasi, passante per l'origine O degli assi coordinati che supponiamo ortogonali. Denotiamo poi, per brevità, con U il vettore spostamento elastico u, v, w e con U' il vettore corrispondente alla distorsione u', v', w'. La (2) diviene, con notissimi simboli vettoriali:

$$(3)\qquad -\int_V \rho\left(U'\times\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}\right)dV=-a\times\left[\lambda\int_\sigma F_\sigma d\sigma+\gamma\int_\sigma(P_\sigma-O)\wedge F_\sigma d\sigma\right]$$

nella quale a è un vettore di lunghezza unitaria, orientato come l'asse r; P_σ il punto generico della superficie σ ed il vettore F_σ rappresenta infine la tensione interna per unità d'area nel punto P_σ.

Sono immediati i due seguenti enunciati, i quali si deducono dalla (3) ponendo in essa rispettivamente $\lambda=1$ e $\gamma=0$, ovvero $\lambda=0$ e $\gamma=1$.

1°) « In un corpo elastico vibrante liberamente, la proiezione della risultante delle tensioni interne che si sviluppano in un dato istante sulla sezione generica σ, rispetto ad una direzione qualsiasi, è eguale e contraria al lavoro che le forze d'inerzia $\left(-\rho\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}dV\right)$ eseguirebbero nel cambiamento di configurazione a cui darebbe luogo una distorsione elastica U', operata imprimendo alle due facce del taglio una traslazione unitaria relativa, parallela a quella direzione ».

2°) « In un corpo elastico vibrante liberamente, la somma dei momenti delle singole tensioni che si trasmettono attraverso σ, presi rispetto ad un asse arbitrario, è eguale e contraria al lavoro che le forze d'inerzia eseguirebbero nel cambiamento di configurazione a cui darebbe luogo una distorsione elastica, operata imprimendo alle due facce del taglio σ una rotazione unitaria relativa attorno al medesimo asse ».

3. Supponiamo ora che il moto di ogni particella del sistema liberamente vibrante sia armonico semplice di periodo $\frac{2\pi}{p_r}$. Il vettore vibrante U sarà allora espresso da una formula del tipo

$$U = A_r \cos(p_r t + \varepsilon_r) U_r \tag{4}$$

nella quale U_r è un vettore regolare funzione soltanto delle coordinate x, y, z; A_r è una costante arbitraria piccolissima, esprimente l'ampiezza del moto vibratorio ed ε_r è anch'essa una costante. In quanto alla costante p_r che figura nella (4), è noto che avendo supposto il corpo liberamente vibrante, *le equazioni del moto elastico* e *le equazioni ai limiti* possono essere soddisfatte dal vettore U, espresso dalla (4), purchè p_r sia una radice della cosidetta *equazione di frequenza.*

Sia p_s un'altra radice della detta equazione di frequenza, diversa da p_r, e consideriamo un nuovo vettore U_1, analogo al vettore U espresso dalla (4):

$$U_1 = A_s \cos(p_s t + \varepsilon_s) U_s.$$

Il teorema di Betti, applicato alle due vibrazioni simultanee U e U_1, entrambi regolari, ci fornisce la relazione:

$$p_r^2 \int U_r \times U_s dV = p_s^2 \int U_r \times U_s dV$$

la quale, per essere $p_r \neq p_s$, ci dà la ben nota relazione

$$\int_V U_r \times U_s dV = 0$$

esprimente la cosidetta ***proprietà*** di ***ortogonalità*** delle funzioni vettoriali U_r e U_s.

Ma, oltre alle dette condizioni, la costante p_r ed il corrispondente vettore U_r godono di alcune proprietà essenzialmente dovute all'applicazione del secondo principio di reciprocità.

Infatti, per la vibrazione U, espressa dalla (4), avremo evidentemente:

$$F_\nu = A_r \cos(p_r t + \varepsilon_r) F_\nu^*$$

con F_ν^* funzione vettoriale del solo punto P_σ. La (3) diviene:

$$p_r^2 \int_V \rho (U_r \times U) d V = - a \times \left[\lambda \int_\sigma F_\nu^* d\sigma + \gamma \int_\sigma (P_\sigma - O) \wedge F_\nu^* d\sigma \right].$$

Questa caratteristica relazione, che fa riscontro ad una relazione analoga conosciuta nell'ordinaria teoria dei moti elastici, stabilisce uno stretto legame fra la teoria dei moti vibratori e le distorsioni elastiche di VOLTERRA.

La relazione alla quale abbiamo testè accennato, dovuta al CLEBSCH, è la seguente:

$$p_r^2 \int_V (U_r \times U_r) d V = 2 \int_V W_r^* d V$$

nella quale W_r^* rappresenta la funzione potenziale elastica, corrispondente al vettore U_r [1].

Dalla R. Università di Messina, marzo 1925.

[1] Vedi, ad es. H. LOVE: *A treatese on the mathem. theory of elasticity.* Cambridge 1906, pag. 177.