
BOLLETTINO UNIONE MATEMATICA ITALIANA

T. BONNESEN

Sulle proprietà estremanti della sfera. La disuguaglianza isoperimetrica

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1,
Vol. 4 (1925), n.2, p. 49–56.

Unione Matematica Italiana

[http:
//www.bdim.eu/item?id=BUMI_1925_1_4_2_49_0](http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1925_1_4_2_49_0)

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione
Matematica Italiana, 1925.

PICCOLE NOTE

Sulle proprietà estremanti della sfera.

La disuguaglianza isepifanica.

Nota di T. BONNESEN (a Copenaghen)

Il volume della sfera è maggiore di quello di ogni altro corpo, la cui superficie abbia la stessa area di quella della sfera, od anche la superficie della sfera è minore di quella di ogni altro corpo avente lo stesso volume. Tali sono le proprietà estremanti ben note della sfera. Esse possono essere espresse dalla disuguaglianza, valida per una superficie qualunque,

$$(1) \quad \frac{1}{6\sqrt{\pi}} F^{\frac{3}{2}} - V \geq 0,$$

dove F è l'area della superficie e V il volume racchiuso dalla superficie. Noi chiameremo, in ciò che segue, questa disuguaglianza: *disuguaglianza isepifanica classica*; il suo primo membro L diremo *deficit isepifanico* del corpo considerato ($\epsilon\pi\iota\phi\acute{\alpha}\nu\epsilon\iota\varsigma$ = superficie). Il segno di uguaglianza non vale che per la sfera.

In questa Nota noi daremo una dimostrazione nuova delle proprietà estremanti della sfera, migliorando la disuguaglianza classica col sostituire, allò zero del secondo membro, una espressione che è nulla nel caso della sfera e positiva per ogni altro corpo. La dimostrazione è fondata sulle celebri costruzioni di J. STEINER e di H. A. SCHWARZ, che noi possiamo chiamare la « *simmetrizzazione* » e l'« *arrotondamento* », rispettivamente.

Sia V il volume e F la superficie di un corpo dato L . STEINER ne costruisce un altro L_1 , simmetrico, avente lo stesso volume V e di superficie F_1 non maggiore di F ($F_1 \leq F$). A questo scopo, si tagli il corpo L con delle rette perpendicolari ad un

piano fisso P . Ciascuna di queste rette ha uno o più segmenti nell'interno di L . Sia s la somma di questi segmenti, per una qualunque delle rette, e, a partire dal piano P , da una parte e dall'altra, si staccino, sulla retta considerata, due segmenti di lunghezza $\frac{1}{2}s$. Facendo variare la retta, questi segmenti generano un corpo simmetrico L_1 , il cui volume è evidentemente uguale a V . Se L è un poliedro, è facile di dimostrare che vale in generale la disuguaglianza $F_1 < F$. Soltanto nel caso in cui i corpi L e L_1 sono congruenti, si ha $F_1 = F$. Si ha dunque, per un corpo qualunque, $F_1 \leq F$, perchè la superficie di un corpo è sempre il limite della superficie di una certa serie di poliedri. La condizione necessaria, per l'uguaglianza $F_1 = F$, è sempre la $L_1 \equiv L$, ma la dimostrazione di ciò è un po' complicata per i corpi non poliedrici ⁽¹⁾. Per il nostro scopo basta sapere che vale la $F_1 \leq F$. Osserveremo che la sezione di L_1 col piano di simmetria è identica alla proiezione ortogonale del corpo L su questo piano. Noi chiameremo l'area di questa proiezione una *estensione esterna* di L .

A partire da un corpo L dato, SCHWARZ costruisce un corpo di rivoluzione L nel modo seguente. Il corpo L viene tagliato con piani perpendicolari ad un asse fisso A , e in ciascuno di questi piani si costruisce un cerchio, col centro su A , di area uguale alla somma delle aree staccate sul piano dalla superficie di L . I cerchi così costruiti generano un corpo di rivoluzione L_1 , che ha, evidentemente, lo stesso volume di L . Nella sua Memoria: *Sulla proprietà di minimo della sfera* (Rendiconti di Palermo, t. XXXIX, 1915), nella quale LEONIDA TONELLI ha dato per primo una dimostrazione completa della proprietà minimante della sfera, il TONELLI comincia col dimostrare la disuguaglianza $F_1 < F$ nel caso in cui L sia un poliedro. Per un corpo qualunque si ha, per conseguenza, $F_1 \leq F$, e questo risultato basta per la nostra ricerca. Ma si può aggiungere che la $F_1 = F$ vale soltanto nel caso in cui sia $L_1 \equiv L$. Osserviamo che l'area del massimo cerchio di L_1 , ortogonale all'asse A , è uguale alla massima somma delle aree staccate da L sui piani perpendicolari ad A . Chiameremo, questa massima somma, *estensione interna* di L , rispetto ad A . Aggiungiamo che, se la superficie di L contiene delle aree situate su un piano perpendicolare ad A , si ritrova sulla superficie di L_1 un'area della stessa grandezza che ha la forma di un cerchio o di una corona circolare.

(1) Cfr. W. BLASCHKE: *Kreis und Kugel*. Leipzig, 1916.

Facciamo ora uso delle costruzioni sopra indicate, nel modo seguente. Possiamo cominciare coll'arrotondare il corpo dato L rispetto ad un asse arbitrario A , per poi simmetrizzare il nuovo corpo rispetto ad un piano perpendicolare ad A , giungendo così ad un corpo simmetrico, di rivoluzione, L' . Questo corpo è tagliato in due punti al più dalle rette parallele o perpendicolari ad A , eccezion fatta per le rette situate sulle parti piane o cilindriche della superficie di L' ; e se S è la *estensione interna* di L perpendicolare ad A , il raggio r del massimo cerchio di L' è dato dalla relazione $\pi r^2 = S$.

Ma possiamo procedere anche in altro modo, e cioè possiamo cominciare con la simmetrizzazione del corpo L , rispetto ad un piano perpendicolare ad A , per poi arrotondare, rispetto ad A , il corpo simmetrico così ottenuto, giungendo in tal maniera ad un corpo L' della stessa natura di quello costruito con l'altro procedimento. L'area $\pi r^2 = S$ del massimo cerchio parallelo di L' è, attualmente, uguale alla *estensione esterna* di L .

In ciò che segue, noi considereremo soltanto una delle due metà simmetriche di L' .

Nel cilindro di rivoluzione circoscritto a L' sia inscritta una semisfera di raggio r . Supporremo l'emisfera e la metà considerata di L' situate dal medesimo lato del piano di simmetria. Sia P' un cerchio parallelo di L' e indichiamo con K' un cono tangente ad L' lungo P' ; sia poi K'' un cono parallelo a K' , circoscritto all'emisfera (Fig. 1). Spostiamo, con una traslazione parallela all'asse A , il cerchio P' , in modo che esso venga a trovarsi su K'' , in P'' . Facendo variare P' , la periferia di P'' genererà la superficie di un nuovo corpo di rivoluzione L'' ; e P'' , dovendo trovarsi su K'' , sarà situato o sulla emisfera o al di fuori di essa. Perciò il corpo L'' conterrà, in generale, l'emisfera nel suo interno; e i due corpi coincideranno soltanto in questi due casi: 1°) se L' è esso stesso una sfera; 2°) se L' è composto di un cilindro di rivoluzione di raggio r e di due emisfere dello stesso raggio. Il calcolo — che verrà fatto dettagliatamente alla fine della Nota — del volume limitato da L'' e dall'emisfera, dà il valore

$$(2) \quad \frac{1}{2} r F' - \frac{2}{3} \pi r^3 - V,$$

oppure un valore minore di questo, intendendo che qui F' rappresenti l'area della superficie di L' , e V il volume di L' , che è

uguale a quello di L . Si ha, pertanto, la disuguaglianza

$$(3) \quad \frac{1}{2} r F' - \frac{2}{3} \pi r^3 - V \geq 0.$$

E siccome è $F \geq F'$, si ha anche

$$(4) \quad \frac{1}{2} r F - \frac{2}{3} \pi r^3 - V \geq 0,$$

la quale disuguaglianza vale per il corpo dato L . Se poniamo $4\pi R^2 = F$ ed aggiungiamo l'uguaglianza

$$\frac{1}{6\sqrt{\pi}} F^{\frac{3}{2}} = \frac{4}{3} \pi R^3,$$

la precedente disuguaglianza può scriversi nella forma seguente:

$$(5) \quad \frac{1}{6\sqrt{\pi}} F^{\frac{3}{2}} - V \geq \frac{2}{3} \pi (R - r)^2 (2R + r).$$

od anche, introducendo $\pi r^2 = S$,

$$(6) \quad \frac{1}{6\sqrt{\pi}} F^{\frac{3}{2}} - V \geq \frac{1}{6\sqrt{\pi}} (\sqrt{F} - 2\sqrt{S})^2 (\sqrt{F} + \sqrt{S}).$$

In questa disuguaglianza, S può avere il valore tanto della *estensione interna* quanto della *estensione esterna* di L , rispetto ad una direzione arbitraria. L'insieme delle *estensioni interne* e quello delle *estensioni esterne* possono o no avere dei valori in comune. Nel secondo caso, tutte le *estensioni interne* sono minori delle *estensioni esterne*; ma allora la disuguaglianza precedente è valida anche per i valori intermedi di S , il che è evidente per la forma che ha il polinomio di 3° grado in r formato dal secondo membro della (5). In generale il secondo membro di (6) è positivo; e noi vogliamo ora cercare le condizioni affinchè esso sia uguale a zero.

Sia O il centro di una sfera di raggio 1, ed A una semiretta passante per O e intersecante la sfera in a . Sia poi Q la somma numerica delle proiezioni di tutti gli elementi di superficie di L su un piano perpendicolare ad A . Secondo una proposizione di CAUCHY, si può esprimere la superficie F di L con la formula

$$7) \quad F = \frac{1}{2\pi} \int Q d\omega,$$

dove $d\omega$ è l'elemento di superficie della sfera corrispondente al punto a , e dove l'integrazione è estesa alla intera sfera. Questa formula può verificarsi direttamente per un'area piana; essa è, pertanto, valida per una superficie qualunque.

Se L è un corpo convesso ed S è la *estensione esterna* di L perpendicolare ad A , si ha $Q = 2S$, vale a dire, il valore medio della *estensione esterna* è data da

$$(8) \quad \frac{1}{4\pi} \int S d\omega = \frac{1}{4} F.$$

E siccome la proiezione S prende il suo valore medio per un'infinità di direzioni di proiezione, si vede che il secondo membro di (6) può diventare uguale a zero, e precisamente, per $S = \frac{1}{4} F$.

Però, soltanto nel caso in cui L sia una sfera, il secondo membro di (6) può essere identicamente uguale a zero. L'espressione medesima ci mostra che, affinchè ciò avvenga, è necessario che sia $S = \frac{1}{4} F$ tanto per le *estensioni interne* quanto per le *estensioni esterne*. Perciò L deve essere convesso, perchè, per un corpo non convesso, qualcuna delle proiezioni Q , sopra indicate, è maggiore del valore corrispondente di $2S$, ed il valore medio delle *estensioni interne* è, per conseguenza, minore di $\frac{1}{4} F$. Affinchè poi una *estensione interna* sia uguale alla *estensione esterna* corrispondente, è necessario che la frontiera della sezione corrispondente di L coincida con la curva di contatto del cilindro circoscritto, la quale curva risulta così una curva piana. Ma le sole superficie per le quali tutte le curve di contatto coi cilindri circoscritti sono piane, sono le superficie del 2° ordine ⁽¹⁾. Nel caso nostro abbiamo poi che il piano di contatto deve essere perpendicolare al cilindro: il corpo deve dunque essere una sfera.

In questo modo abbiamo veduto che la sfera è il solo corpo il cui deficit *isepifanico* è uguale a zero; per ogni altro corpo tale deficit è positivo. La disuguaglianza classica (1) è dunque dimostrata ed anche migliorata dalla disuguaglianza (6), il cui secondo membro prende il valore massimo o per la minima *estensione interna* o per la massima *estensione esterna*.

Abbiamo veduto più sopra che il segno di uguaglianza nella relazione (3) vale per un corpo composto di un cilindro di rivo-

⁽¹⁾ Cfr. W. BLASCHKE: *Kreis und Kugel*, p. 157.

luzione e di due emisfere di raggio r . Da ciò segue che il coefficiente del secondo membro di una relazione della forma (6), la quale valga per un corpo qualunque, non può essere maggiore di $1:6\sqrt{\pi}$.

Ci resta ora da fare il calcolo del volume limitato del corpo di rivoluzione L'' e dalla emisfera. La fig. 1 rappresenta un quarto della curva meridiana M' di L' e del cerchio di raggio r , il cui centro è posto sull'asse A . Scegliamo A per asse della x , e pren-

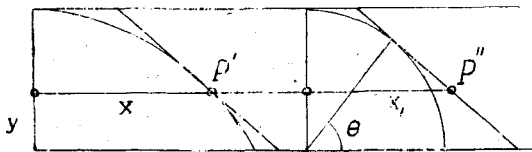


Fig. 1.

diamo l'asse della y sul piano di simmetria di L' . Supponiamo dapprima che la curva M' abbia in ogni punto una tangente ben determinata, e che soltanto la tangente nel punto $(0, r)$ sia parallela ad A . Per la costruzione stessa di M' , x e y saranno, su tale curva, delle funzioni univoche l'una dell'altra. Indicando con θ l'angolo che fa A con la normale di M' in (x, y) , si hanno le espressioni seguenti:

$$\frac{1}{2} V = 2\pi \int_0^r x y dy, \quad \frac{1}{2} F' = 2\pi \int_0^r \frac{y dy}{\cos \theta}.$$

Diamo al punto di contatto P' su M' uno spostamento parallelo ad A , in modo che esso venga in P'' sulla tangente parallela del cerchio. L'ascissa x_1 di P'' , in un sistema di coordinate parallele al sistema considerato la cui origine sia il centro del cerchio, è determinato dall'equazione della tangente: $x_1 \cos \theta + y \sin \theta = r$. Il volume W , limitato dalla base dell'emisfera e dalla superficie generata dal cerchio parallelo P'' , è dunque

$$W = 2\pi \int_0^r \frac{r - y \sin \theta}{\cos \theta} y dy.$$

Il primo termine di questo integrale è

$$2\pi r \int_0^r \frac{y dy}{\cos \theta} = \frac{1}{2} r F'.$$

Il secondo termine dà, essendo $\frac{dy}{dx} = -\cotg \theta$,

$$2\pi \int_0^r y^2 \operatorname{tg} \theta dy = -2\pi \int_{y=0}^{y=r} y^2 dx = -2\pi [xy^2]_{y=0}^{y=r} + 4\pi \int_0^r xy dy = V,$$

perchè per $y=0$ e per $y=r$, $x=0$, è $xy^2=0$. Si ha perciò

$$W = \frac{1}{2} r F' - V,$$

e il volume limitato da L'' e dall'emisfera è dunque, in questo caso,

$$\frac{1}{2} r F' - \frac{2}{3} \pi r^3 - V.$$

Se la curva M' ha dei punti angolari (fig. 2, a)) con due semi-tangenti distinte, il cerchio parallelo P' descriverà, nel passaggio da una tangente all'altra, una superficie cilindrica, facente parte

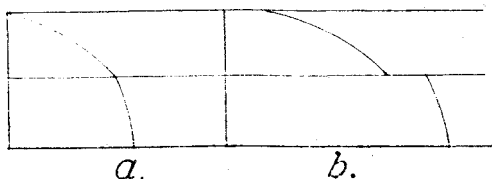


Fig. 2.

della superficie di L' , per arrestarsi ad un nuovo cono di rivoluzione. Ma il calcolo ci conduce al risultato precedente. Il numero dei punti angolari è senza influenza; tale numero può essere anche infinito.

Nella fig. 2, b), la curva meridiana contiene dei segmenti di rette parallele all'asse A . Il corpo L' della figura b) può essere formato allungando quello della figura a) come un telescopio. Il corpo L'' e il volume W sono evidentemente gli stessi nei due casi. Ma se l'allungamento del corpo, corrispondente ad un cerchio parallelo di raggio r_1 , ha la lunghezza h , la quantità $\frac{1}{2} r F' - V$ sarà aumentata di $2\pi h r_1 (r - r_1)$, ed essa è dunque, in questo caso, superiore d'altrettanto del volume $\frac{2}{3} \pi r^3$ dell'emisfera; la disuguaglianza (6) sussiste quindi anche nel caso presente. Va rilevato che un allungamento sul cilindro circoscritto non ha alcuna influenza ($r=r_1$). E si vede pure che M' può avere anche una infinità di segmenti di retta.

Se M' ha una tangente cuspidale parallela all'asse A , il cerchio parallelo subisce una traslazione infinita, e la superficie di L' ha un cilindro asintotico. Ma per il volume di L'' si ritrova il valore precedente W . (Si possono considerare le parti rettilinee sopra indicate di M' come delle tangenti cuspidali. La parte asintotica della superficie di L'' è allora formata dallo stesso cilindro corrispondente; ma questa parte infinita della superficie non ha alcuna influenza sul volume W).

Comunque sia complicato il corpo dato L , la relazione (6) è sempre valida, perchè il volume e l'area della superficie sono, per definizione, i limiti della quantità corrispondente di una certa serie di poliedri, e le *estensioni* di L sono anch'esse i limiti delle *estensioni* dei poliedri, ciò che è stato dimostrato con tutta precisione da L. TONELLI. L può anche estendersi all'infinito. La relazione è poi valida anche per la somma dei volumi e delle superficie di più corpi. Il massimo valore di S è, in questo caso, la somma delle massime *estensioni esterne* dei corpi, e il minimo valore di S è il massimo valore delle minime *estensioni interne*, il che si vede dando ai corpi delle posizioni opportune prima di fare le costruzioni di STEINER e di SCHWARZ.