

---

# BOLLETTINO UNIONE MATEMATICA ITALIANA

---

GIULIO BISCONCINI

## Una dimostrazione vettoriale delle formule di Poisson

*Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie  
1, Vol. 4 (1925), n.1, p. 5–7.*

Unione Matematica Italiana

[http:  
//www.bdim.eu/item?id=BUMI\\_1925\\_1\\_4\\_1\\_5\\_0](http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1925_1_4_1_5_0)

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

---

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma  
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)  
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione  
Matematica Italiana, 1925.

### Una dimostrazione vettoriale delle formule di Poisson.

Nota di GIULIO BISCONCINI

Le formule che il POISSON diede <sup>(2)</sup> per il calcolo delle derivate rispetto al tempo dei coseni direttori di una terna mobile sono state dimostrate vettorialmente dal BOGGIO e la dimostrazione si trova concisamente riportata nel cap. IV del I vol. della *Meccanica razionale* del MARCOLONGO e, con maggiore copia di particolari, nel cap. III del I vol. delle *Lezioni di Meccanica razionale* di LEVI-CIVITA, AMALDI. Siccome, mi sembra, che in questa dimostrazione e, forse più, in quella che leggesi nel cap. II delle *Lezioni di Meccanica razionale* del BURGATTI, i successivi

(2) *Traité de mécanique*. Paris 1831, vol. II, cap. IV.

passaggi siano suggeriti dalla conoscenza della forma del risultato che si vuole conseguire e che perciò da esse esuli quella spontaneità che, quando è possibile, non deve mancare alle dimostrazioni scolastiche, così mi permetto di farne conoscere una in cui, salvo lo spunto iniziale, i successivi passaggi sono tutti suggeriti dalla logica.

Partiamo dall'osservazione che i vettori derivati dei versori fondamentali  $i, j, k$  di una terna ortogonale destrorsa sono rispettivamente perpendicolari ai vettori stessi e che il prodotto vettoriale di uno di questi per un vettore qualunque è, alla sua volta, normale al vettore stesso. È perciò lecito porre:

$$(1) \quad \frac{di}{dt} = \omega_1 \wedge i, \quad \frac{dj}{dt} = \omega_2 \wedge j, \quad \frac{dk}{dt} = \omega_3 \wedge k.$$

Vogliamo vedere se sia possibile soddisfare a tutte tre le relazioni con un unico vettore  $\omega$  anzichè con tre distinti.

Se  $a_r, b_r, c_r$  sono le componenti di  $\omega_r$  sulla terna data, si ha

$$(2) \quad \omega_r = a_r i + b_r j + c_r k, \quad (r = 1, 2, 3)$$

Sostituendo nelle (1) e osservando che

$$\left\{ \begin{array}{l} i \wedge i = j \wedge j = k \wedge k = 0 \\ j \wedge k = i, \quad k \wedge i = j, \quad i \wedge j = k, \end{array} \right.$$

si ottiene:

$$\frac{di}{dt} = -b_1 k + c_1 j,$$

$$\frac{dj}{dt} = -c_2 i + a_2 k,$$

$$\frac{dk}{dt} = -a_3 j + b_3 i.$$

Da queste si ricavano subito sei delle componenti dei vettori  $\omega_r$ . Così, moltiplicando scalarmente la seconda per  $k$  e la terza per  $-j$  si ha:

$$a_2 = \frac{dj}{dt} \times k, \quad a_3 = -\frac{dk}{dt} \times j.$$

Ma siccome, derivando l'identità  $j \times k = 0$ , si ricava

$$\frac{dj}{dt} \times k = -\frac{dk}{dt} \times j$$

in definitiva si ha:

$$a_2 = a_3 = \frac{dj}{dt} \times k.$$

In modo analogo si avrebbe

$$b_1 = b_3 = \frac{dk}{dt} \times i,$$

$$c_1 = c_2 = \frac{di}{dt} \times j.$$

I vettori  $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ , dati dalle (2), risultano dunque determinati, come *a priori* era prevedibile, a meno rispettivamente dei loro componenti  $a_1 i, b_2 j, c_3 k$ . Sfruttando questa indeterminazione col prendere  $a_1 = a_2 = a_3, b_1 = b_2 = b_3, c_1 = c_2 = c_3$  si raggiunge lo scopo di poter soddisfare alle (1) con l'unico vettore

$$\omega = \left( \frac{dj}{dt} \times k \right) i + \left( \frac{dk}{dt} \times i \right) j + \left( \frac{di}{dt} \times j \right) k$$

e si hanno così le relazioni di POISSON:

$$\frac{di}{dt} = \omega \wedge i, \quad \frac{dj}{dt} = \omega \wedge j, \quad \frac{dk}{dt} = \omega \wedge k.$$