UMI

Recensioni

* V.te de Güell: L'espace, la relation et la position. (Essais sur le fondement de la Géométrie)
* U. Ricci: Elasticità dei bisogni, della, domanda e dell'offerta
* N. E. Nörlund: Differenzenrechnung

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **4** (1925), n.1, p. 30–37.

Unione Matematica Italiana

¡http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1925_1_4_1_30_0¿

RECENSIONI

V.te de Güell: *L'espace, la relation et la position.* (Essais sur le fondement de la Géométrie). Paris, Gauthier-Villars, 1924, p. II-139.

L'Autore, il quale asserisce di essersi a lungo preoccupato dei problemi che si riferiscono ai fondamenti della Geometria, e conscio delle difficoltà di vario genere che caratterizzano i primi passi in questa scienza, si propone, nella sua opera, di « ristabilire « la chiarezza, la purezza dei fondamenti ideali che servono di « base a questa scienza ». Egli si assegna il compito di esporre in termini generali, ed indirizzandosi « più ad un pubblico colto in « generale che agli specialisti della Geometria » il punto di vista che, secondo lui, deve essere assunto per stabilire i primi elementi della scienza dello spazio: aggiungendo che l'opera non è che un riassunto di ciò che egli considera come base fondamentale della Geometria.

I primi capitoli, di carattere filosofico, storico o critico, rivelano coltura e letture vaste e svariate, seppure non complete, e possono essere letti con qualche interesse. Ma disgraziatamente, la parte nuova del libro non risponde all'intenzione dell'Autore, che si propone di sostituire una base razionale al postulato euclideo. Il concetto di *rapporto di posizione* su cui vuole fondare la definizione di parallelismo, oltre ad essere impreciso e vago, involge manifestamente un circolo vizioso che rende vano (come era agevole da prevedere) lo sforzo dell'Autore. *s. p.*

U. Ricci: *Elasticità dei bisogni, della domanda e dell'offerta.* — Pubblicato nel « Giornale degli economisti e Rivista di Statistica », numeri di agosto e ottobre 1924.

È uno studio il quale parte dal concetto dell'*elasticità* della *domanda* e dei *bisogni*, introdotto nella scienza economica dal Marshall e, ricordando varie applicazioni già fatte da altri autori, le completa e le coordina in una teoria generale, aggiungendovi anche nuove applicazioni e nuovi concetti.

Per elasticità della domanda s'intende la variazione *percentuale* (o *relativa*) della domanda, divisa per la variazione *percentuale* del prezzo che l'ha provocata (il quoziente va preso in valore assoluto). Analogamente l'elasticità di un bisogno è la variazione percentuale del consumo divisa per la variazione percentuale del grado marginale di utilità.

Il RICCI richiama anche il concetto di flessibilità del prezzo, proposto da uno scrittore americano, il MOORE: la flessibilità non è altro se non il reciproco dell'elasticità.

Analiticamente, chiamando x la quantità domandata e y il prezzo di un certo bene, e sapendosi che:

$$y = f(x)$$

è una funzione decrescente, (onde la derivata y' è negativa) l'elasticità ε è definita dall'equazione:

$$\varepsilon = -\frac{f(x)}{x f'(x)} = \psi(x).$$

Comunemente si parla della elasticità di una curva. Ora questa è una dizione che può dar luogo a equivoci, poichè si può parlare di elasticità di una curva solo nel caso di curve a elasticità *costante*, mentre nel caso di curve a elasticità variabile bisogna limitarsi a discorrere di elasticità in un *punto* della curva. E se si volesse estendere il concetto di elasticità a un tratto della curva, bisognerebbe introdurre nuove convenzioni: supporre, per es., che si voglia alludere a un'elasticità media opportunamente definita.

L'A. quindi studia in tre appositi capitoli le curve a elasticità decrescente, quelle a elasticità crescente e quelle a elasticità costante.

I. Nel caso delle curve a elasticità *decrescente*, egli distingue varie famiglie di curve, ma quelle che hanno interesse per l'economista sono le curve *concave verso l'alto*. L'A. prende in considerazione le curve che egli chiama del WICKSTEED, definite dall'equazione:

$$y = \frac{a}{b + x} - c$$

e quindi le generalizza studiando più opportunamente curve di equazione:

$$y = \frac{a}{(b + x)^n} - c.$$

Altre curve interessanti, la cui elasticità è studiata in questo capitolo, sono: la curva degli errori, quella PEARSONIANA del secondo tipo e una curva del MOORE a flessibilità lineare.

II. Nel capitolo delle curve a elasticità *crescente* l'A. studia le curve che egli chiama del JEVONS, di equazione:

$$y = \frac{a}{(x-b)^n}.$$

Un caso particolare è rappresentato dalla famosa curva di KING, che raffigura la domanda del frumento e ha l'equazione:

$$y = \frac{0{\cdot}824}{(x - 0{\cdot}12)^2}$$

ove la x e la y esprimono dati proporzionali, essendosi fatti uguali a 1 il raccolto medio e il prezzo medio.

In questo capitolo l'A. si diffonde poi a studiare certe curve da lui calcolate nell'ipotesi che l'elasticità sia una funzione lineare della x. Siffatte *curve a elasticità lineare crescente* hanno l'equazione.

$$y = c\left(1 + \frac{\beta x}{\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha}}$$

ove c è una costante e α e β sono i parametri dell'equazione dell'elasticità, la quale ha la forma:

$$\varepsilon = \alpha + \beta x.$$

III. In un altro capitolo l'A. studia le curve a elasticità *costante*, le quali, come il MARSHALL ha già dimostrato, non sono altro se non iperboli. Rientrano in questa categoria le curve di domanda del caffè e del sale calcolate dal BENINI, e che si possono rispettivamente esporre nella seguente forma:

$$y = \frac{A}{x^{\frac{1}{0.384}}} \qquad y = \frac{B}{x^{\frac{1}{0.217}}}.$$

Esaurita così la triplice classificazione delle curve a seconda del comportamento dell'elasticità, l'A. passa a esaminare i punti di *elasticità uguale a 1*, che in questa teoria sono per così dire i punti strategici.

Era noto fin dai tempi del COURNOT che i punti di elasticità 1 sono quelli che rendono massima la spesa fatta dai consumatori di una certa merce o, ciò che val lo stesso, la somma di denaro riscossa dai venditori della merce. Se il punto dell'equilibrio fra domanda e offerta di una merce cadesse proprio in un punto di elasticità 1 ne conseguirebbe che, non appena l'equilibrio si sposti o in un senso o un altro (cioè o che il consumo aumenti o diminuisca) la spesa complessiva dei consumatori della merce diminuisce e quindi *si libera una certa porzione di reddito degli acquirenti* di quella merce, porzione che può essere destinata all'acquisto di altre merci o immediate o future (risparmio).

L'A. adotta perciò per i punti di elasticità 1, le seguenti denominazioni equivalenti:

a) punti di *variazione monotona della spesa* complessiva;

b) punti di *ripercussione monotona sulla domanda* di altre merci.

E procede enunciando vari teoremi. Particolarmente interessante è l'applicazione che egli fa relativamente alla *elasticità del valore della moneta* nei paesi a moneta svilita.

In sostanza, dire che in un certo tratto della curva di domanda l'elasticità rimane inferiore a 1 equivale ad enunciare che il rettangolo della ascissa e dell'ordinata diminuisce col crescere dell'ascissa. In altre parole elasticità minore di 1 significa che *la spesa complessiva sopportata dai consumatori* della merce *diminuisce* col crescere del *prezzo*. Donde l'importanza della nozione.

Verso la fine del suo studio l'A. abbozza anche una teoria matematica dell'elasticità dell'*offerta*, mostrando come nelle curve crescenti non possa esservi un rettangolo massimo dell'ordinata e dell'ascissa ma possono esservi punti di elasticità 1. Egli dimostra come la curva di elasticità 1, che nel caso di curve decrescenti è rappresentata dall'iperbole equilatera, nel caso delle curve crescenti diventa la *retta passante per l'origine*. Egli determina anche l'equazione delle curve crescenti a *elasticità lineare*.

Infine in un breve capitolo l'A. propone di definire, come elasticità *media* di un tratto di curva, la media aritmetica della elasticità dei singoli punti del tratto. Quindi, chiamando ε_m l'elasticità media compresa fra i punti di ascissa x_1, x_2, tale elasticità media è uguale a:

$$\varepsilon_m = \frac{1}{x_2 - x_1}\int_{x_1}^{x_2} \psi(x)\,dx.$$

a. b.

N. E. Nörlund: *Differenzenrechnung*. Berlin, J. Springer, 1924. p. IX-551.

Nonostante le sue applicazioni e l'interesse di molti problemi cui dà origine, il Calcolo delle differenze, le cui origini risalgono al secolo XVII e che fu coltivato da insigni matematici quali Newton, Taylor, Stirling, Laplace, Gauss, Lacroix, ecc., fu per un lungo periodo alquanto negletto. Solo in tempi recenti fu rimesso in valore e furono posti in evidenza i suoi legami colla odierna teoria delle funzioni, per opera di varî autori fra cui, oltre a BOOLE e MARKOFF, meno recenti, ricorderemo MELLIN, PINCHERLE, WALLEMBERG, GULDBERG, BIRKHOFF, CARMICHAEL, GALBRUN, PERRON, e l'Autore della presente opera (1). Ma i risultati delle ricerche fatte in questo nuovo indirizzo si trovano per lo più sparsi in memorie isolate, ed era perciò desiderabile che un'opera d'insieme raccogliesse quanto di più importante e di più interessante era stato ottenuto: a questo desiderio risponde, nel modo più completo e soddisfacente, il libro dell'eminente matematico danese. Ma codesto libro non è una semplice sintesi, per quanto egregiamente compilata, di lavori di varia origine; gli conferisce invece unità organica una idea dominante, quella della soluzione, detta dall'A., *principale*, di un'equazione lineare alle differenze, idea feconda che getta una nuova luce su molte delle questioni trattate nell'opera: in guisa che si può fondatamente affermare che il libro che il NÖRLUND presenta agli studiosi resterà classico, e riescirà fecondo per l'avviamento a nuove e interessanti ricerche in questo importante capitolo dell'Analisi.

Darò qui brevemente un riassunto dei punti principali del contenuto del libro, seguendo l'ordine dei capitoli.

Sia posto per brevità:

$$\nabla_{\omega} f(x) = \frac{f(x+\omega) - f(x)}{2}, \tag{1}$$

$$\Delta_{\omega} f(x) = \frac{f(x+\omega) - f(x)}{\omega}. \tag{2}$$

Il primo problema importante del Calcolo delle differenze è la risoluzione delle equazioni:

$$\nabla_{\omega} f(x) = \varphi(x), \tag{3}$$

$$\Delta_{\omega} f(x) = \varphi(x), \tag{4}$$

essendo $\varphi(x)$ una funzione data.

Le equazioni (3) e (4) possiedono infinite soluzioni. Se $p(x)$ e $\pi(x)$ sono funzioni arbitrarie, ma periodiche e che soddisfano alle

(1) Vedi: N. E. NÖRLUND, *Neuere Untersuchungen über Differenzengleichungen*. Encyklopädie der Math. Wiss. II, C. 7 (1923), pp. 675-721; N. E. NÖRLUND, *Mémoire sur le calcul aux différences finies*, Acta Math. 44 (1922), pp. 71-211. ecc.

equazioni seguenti:

$$p(x+\omega)=-p(x), \quad \pi(x+\omega)=\pi(x),$$

le soluzioni delle equazioni (3) e (4) si ottengono aggiungendo, ad una loro soluzione, particolare rispettivamente le funzioni $p(x)$, $\pi(x)$. Ora, tra queste infinite soluzioni, il NÖRLUND distingue le *soluzioni principali*, caratterizzate da speciali proprietà, fra cui quella di avere, in casi estesi, limite finito per le loro derivate, per $x \to \infty$. Così, dopo aver premesso nel primo capitolo le generalità necessarie, nel secondo tratta il caso che la funzione $\varphi(x)$ nella (3) e nella (4) sia un polinomio, particolarmente considera le equazioni:

$$\Delta B_\nu(x)=\nu x^{\nu-1},$$
$$\nabla E_\nu(x)=x^\nu,$$

ottenendo rispettivamente come soluzioni i ben noti polinomi di BERNOULLI e di EULERO.

Nel terzo capitolo suppone che x ed ω siano reali e che $\varphi(x)$ sia una funzione reale o complessa, che sia continua per $x \geq a$, o che ammetta derivata di un certo ordine: imponendo inoltre a $\varphi(x)$ alcune ovvie condizioni ai limiti, considera le serie:

$$2\sum_{s=0}^{\infty}(-1)^s\varphi(x+s\omega), \tag{5}$$

$$-\omega\sum_{s=0}^{\infty}\varphi(x+s\omega). \tag{6}$$

Queste soddisfano formalmente alle equazioni (3) e (4) rispettivamente; ma in generale sono divergenti.

Considera poi la serie:

$$G(x\,|\,\omega;\eta)=2\sum_{s=0}^{\infty}(-1)^s\varphi(x+s\omega)e^{-\eta\lambda(x+s\omega)},$$

$\lambda(x)=x^p\log^q x$, $p\geq 1$, $q\geq 0$, e dimostra che questa, che convergerà per tutti i valori di η, nelle ipotesi ammesse, tende uniformemente verso il limite quando η tende a zero e pone

$$\lim_{\eta\to\infty} G(x\,|\,\omega;\eta)=G(x\,|\,\omega)=\underset{\omega}{\mathrm{S}}\,\varphi(x)\nabla x.$$

Questo limite viene chiamato *Wechselsumme* della funzione $\varphi(x)$ ed è tale che soddisfa alla equazione:

$$\underset{\omega}{\Delta}G(x)\,|\,\omega)=\varphi(x).$$

Il simbolo $\mathop{S}$ rappresenta dunque l'operazione inversa della operazione $\mathop{\nabla}\limits_{\omega}$. L'A. definisce la $G(x\,|\,\omega)$ come la *soluzione principale* della (3); essa coincide con la somma delle serie (5) quando questa è convergente. Analogamente considera l'espressione seguente:

$$F(x\,|\,\omega;\,\eta)=\int_a^\infty \varphi(x)e^{-\mu\chi(x)}dx-\omega\sum_{s=0}^{\infty}\varphi(x+s\omega)e^{-\eta\lambda(x+s\omega)}.$$

L'integrale e la serie al secondo membro convergono per ogni valore positivo di η; dimostra, nelle ipotesi ammesse, che $F(x\,|\,\omega;\,\eta)$ tende uniformemente verso il limite quando η tende a zero, e pone:

$$\lim_{\eta\to 0} F(x\,|\,\omega;\,\eta)=F(x\,|\,\omega)=\mathop{S}\limits_{a}^{x}\varphi(x)\mathop{\Delta x}\limits_{\omega},$$

questo limite viene chiamato la *somma* della funzione $\varphi(x)$ ed è tale che

$$\mathop{\Delta}\limits_{\omega} F(x\,|\,\omega)=\varphi(x).$$

Questo simbolo $\mathop{S}\limits_{a}^{x}$ rappresenta dunque l'operazione inversa della operazione $\mathop{\Delta}\limits_{\omega}$ e dipende dalla costante arbitraria a.

Per definizione $F(x\,|\,\omega)$ è la *soluzione principale* della (4) e coincide con la somma della serie (6) quando questa è convergente.

L'importanza sta nel fatto, che la distingue dalle altre soluzioni particolari, di essere strettamente caratterizzata dalle proprietà della funzione data $\varphi(x)$, colla quale essa soluzione principale viene ad avere una più stretta affinità. Così, ad esempio, se $\varphi(x)$ ha derivata di un dato ordine, la quale tende a zero per x tendente all'infinito, dimostra che analogamente avviene per le soluzioni principali e non per le altre.

Di queste soluzioni principali dà numerose eleganti proprietà, e determina i loro sviluppi asintotici ed in serie trigonometriche.

Nel quarto capitolo suppone che $\varphi(x)$ sia una funzione analitica regolare in un certo angolo, o in un semipiano, o in tutto il piano complesso, soddisfacente a delle condizioni, allora avviene che pure $G(x\,|\,\omega)$, $F(x\,|\,\omega)$, saranno delle funzioni analitiche di x ed ω regolari rispettivamente nell'angolo, o nel semipiano o in tutto il piano complesso. Studia allora il prolungamento analitico e il comportamento attorno ai punti singolari.

Dopo aver nel quarto capitolo fatto applicazione dei precedenti risultati allo studio delle funzioni

$$\psi(x) = \underset{1}{\overset{x}{\mathrm{S}}} \frac{\Delta z}{z}, \quad g(x) = \mathrm{S} \frac{\nabla z}{z}, \quad \log \gamma(x) = \frac{1}{2} \mathrm{S} \log z \nabla z$$

e della funzione Γ, nei due capitoli seguenti, generalizza le proprietà svolte nei primi capitoli.

Considera le equazioni

$$\overset{n}{\underset{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n}{\Delta}} f(x) = \varphi(x), \tag{7}$$

$$\overset{n}{\underset{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n}{\nabla}} G(x) = \varphi(x), \tag{8}$$

essendo

$$\overset{n}{\underset{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n}{\nabla}} f(x) = \underset{\omega_n}{\nabla} \left(\overset{n-1}{\underset{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{n-1}}{\nabla}} f(x) \right),$$

e

$$\overset{n}{\underset{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n}{\Delta}} f(x) = \underset{\omega_n}{\Delta} \left(\overset{n-1}{\underset{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{n-1}}{\Delta}} F(x) \right).$$

Così determina i polinomi di EULERO e di BERNOULLI di ordine n, e le ***soluzioni principali*** delle equazioni (7) e (8) i loro sviluppi asintotici e le loro proprietà principali. *(continua)*