Bollettino Unione Matematica Italiana

UMI

Sunti di lavori italiani

* Lavori di: Gino Loria, Enea Bortolotti, C. Rosati, Giuseppe Usai

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **4** (1925), n.1, p. 22–26.

Unione Matematica Italiana

¡http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1925_1_4_1_22_0¿

SUNTI DI LAVORI ITALIANI

GINO LORIA: *Da Descartes e Fermat a Monge e Lagrange. Contributo alla storia della Geometria analitica.* Memorie della R. Accademia dei Lincei, Scienze fis. e matem., Serie V, Tom. XIV, pp. 707-795.

La *Géométrie* di DESCARTES — opera che inaugura la letteratura relativa al metodo delle coordinate — si distingue dai trattati moderni di geometria analitica assai più di quanto differiscano fra di loro due esposizioni, una antica e l'altra moderna, di qualunque altra disciplina matematica. Chi da tale constatazione è tratto ad investigare la evoluzione di quel ramo dello scibile matematico, si trova di fronte a difficoltà prodotte principalmente da due fatti e cioè: I. DESCARTES (e altrettanto può dirsi di FERMAT, l'altro dei creatori della geometria analitica) considerava la totalità dei nuovi procedimenti, non come costituenti una nuova disciplina, ma siccome una semplice metamorfosi delle procedure usate dai grandi geometri della Grecia, dovuta all'influenza dell'algebra trionfante. II. Nella seconda metà del Sec. XVII si costituì il calcolo infinitesimale, il quale attrasse tutti gli spiriti eletti con la prospettiva di brillanti applicazioni e nei lavori risultanti alle coordinate è riserbato il modesto ufficio di semplici ausiliari, quasi non fossero enti degni di considerazione e di studio. Però nello stesso periodo di tempo i pochi cenni sulle coordinate nello spazio, rapidamente vergati da DESCARTES, vennero svolti e condussero allo studio algebrico delle curve sghembe e delle superficie. La geometria analitica a tre coordinate non tardò ad attrarre l'attenzione dei giganti dello spirito che rispondono ai nomi di EULERO, MONGE e LAGRANGE: le indagini da essi compiute diedero il mirabile risultato che l'applicazione dell'algebra alla geometria, dopo un secolo e mezzo di tentennamenti, finì per assumere il contenuto e la forma che debbono ritenersi definitivi. Questo importante periodo storico è studiato nella memoria che annunciamo e di cui il piano risulta dai titoli dei sette Capitoli che la formano e che qui riferiamo:

I. I precursori di RENATO DESCARTES. II. DESCARTES e FERMAT nella storia delle coordinate. III. Progressi compiuti dal metodo cartesiano durante la seconda metà del secolo XVII. IV. Le coordinate in istato di simbiosi col calcolo infinitesimale. V. Costituzione della teoria generale delle curve algebriche piane. VI. La geometria analitica dello spazio. VII. Assetto definitivo del metodo cartesiano.

ENEA BORTOLOTTI: *Extension du Théorème de Beltrami-Enneper aux réseaux conjugués d'une* V_2 *en* V_3. « Comptes rendus de l'Académie des Sciences » t. 178, 1925.

In questa nota, dopo aver ricordato come le nozioni e le proprietà di curvatura di una linea in V_n possano estendersi alle serie di direzioni uscenti dai punti di una linea [1], mostro come questa generalizzazione conduca a stabilire un semplice teorema sui sistemi coniugati di linee di una superficie in V_3. Questo teorema, che estende ai sistemi coniugati il noto teorema di BELTRAMI-ENNEPER sulla torsione delle asintotiche, può enunciarsi così: « Dato, su di una V_2 in V_3, un doppio sistema di linee coniugate, in ciascun punto P di V_2 il prodotto delle torsioni associate alle serie di direzioni delle linee di ciascun sistema uscenti dai punti di una linea dell'altro è costante, ed eguale alla curvatura relativa K_r della V_2 in P, presa col segno cambiato ».

In una memoria di prossima pubblicazione esporrò con maggiori dettagli questo, ed alcuni altri risultati che a questo si collegano; in particolare indicherò come questo teorema possa estendersi alle V_2 in V_n.

C. ROSATI: *Sopra certi invarianti aritmetici delle serie algebriche semplicemente infinite appartenenti ad una curva algebrica* (in corso di stampa nei « Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo »).

Fecondo di risultati importanti nella Geometria algebrica è stato il criterio aritmetico di CASTELNUOVO che permette di caratterizzare sopra una curva C del genere p le serie alge-

[1] Vedi ad es.: W. FR. MEYER. *Ueber die Theorie benachbarter Geraden, und einen verallgemeinerten Krümmungsbegriff.* Leipzig, Teubner 1911, e STRUIK, *Grundzüge der mehrdimensionalen Differentialgeometrie.* Berlin, Springer 1922, pag. 77.

briche γ_n^1 costituite di gruppi equivalenti. Esso si enuncia dicendo che: ***Se*** ν ***è l'indice della serie e*** k_1 ***è il numero dei suoi punti doppi, si ha*** $k_1 \leq 2\nu(n+p-1)$, ***l'uguaglianza sussistendo quando e soltanto quando la serie è costituita di gruppi equivalenti.***

La differenza $j_1 = \nu(n+p-1) - \frac{1}{2}k_1$, che esprime il numero dei gruppi della γ_n^1 contenuti parzialmente in una g_{n-1+p}^{n-1} non speciale generica, suole perciò chiamarsi ***difetto di equivalenza*** della serie.

Insieme al difetto j_1, il COMESSATTI ha considerato altri $p-1$ caratteri $j_2 \dots j_p$, essendo j_r il numero dei gruppi di rn punti formati da r gruppi di γ_n^1 e contenuti parzialmente in una serie lineare $g_{r(n-1)+p}^{r(n-1)}$ non speciale generica. Gli invarianti $j_1 j_2 \dots j_p$ sono tali che l'annullarsi di uno porta di conseguenza l'annullarsi dei successivi, e se j_q è l'ultimo di essi diverso da zero, la serie γ_n^1 è di livello costante per $p-q$ integrali indipendenti di 1ª specie della curva C (formanti un sistema regolare riducibile). Questo notevole risultato di COMESSATTI è dunque, dal punto di vista trascendente, la generalizzazione del criterio di CASTELNUOVO.

L'importanza degli invarianti $j_1 \dots j_p$ nello studio delle serie algebriche, che già appare nella proprietà dimostrata da COMESSATTI, è stata posta in maggior luce dalla seguente interpretazione analitica dovuta a CASTELNUOVO. Se C' è una curva del genere $\bar{\omega}$ birazionalmente identica alla serie γ_n^1, fra C e C' intercede una corrispondenza di indici n, ν; e indicando con T, T^{-1} le due operazioni, l'una inversa dall'altra, che conducono da un punto di C' e C agli omologhi di C e C', la $T^{-1}T$ è una corrispondenza della curva C equivalente alla sua inversa la quale è dotata di p valenze reali e negative. L'equazione di grado p $f(z) = 0$ che ha queste valenze per radici avrà dunque i coefficenti tutti positivi; orbene, *questi coefficenti sono appunto gli invarianti* $j_1 j_2 \dots j_p$.

La determinazione degli invarianti j_r in funzione di altri caratteri numerativi della serie, che per $r=1$ si ottiene mediante l'applicazione di una nota formula di SCHUBERT, è per $r>1$ tutt'altro che agevole. E come j_1 dipende dal numero k_1 dei punti doppi di γ_n^1, cioè del numero delle coincidenze della corrispondenza simmetrica R_1 in cui sono omologhi due punti *congiunti da un gruppo* di γ_n^1, così j_r dipende dai numeri delle coincidenze simmetriche $R_1 R_2 \dots R_r$, essendo R_i quella corrispondenza in cui sono omologhi due punti quando sono congiunti da una *catena* costituita da i gruppi di γ_n^1.

Nella mia Memoria ritrovo anzitutto il risultato di COMESSATTI, collegandolo con la rappresentazione trascendente di HURWITZ delle corrispondenze algebriche fra due curve; poi, partendo dalla proprietà stabilita da CASTELNUOVO, espongo un nuovo procedimento col quale per ogni assegnato indice r si determina il valore di j_r in funzione dei caratteri n, ν, $k_1, \dots k_r$ e del genere p, procedimento del tutto diverso da quello di COMESSATTI, e informato ai metodi delle mie ricerche sulla teoria delle corrispondenze. Il criterio direttivo è il seguente. Si abbia sulla curva C una corrispondenza $R = \varphi(T^{-1}T)$, funzione razionale di $T^{-1}T$; se $\alpha\beta$ sono gl'indici e U è il numero delle coincidenze di R, è noto che

$$U = \alpha + \beta + 2(\rho_1 + \rho_2 + \dots + \rho_p),$$

essendo $\rho_1\rho_2 \dots \rho_p$ le valenze (reali) di R. Poichè si ha $-\rho_i = \varphi(-\gamma_i)$, la conoscenza dei numeri $\alpha\,\beta\,U$ porterà ad una relazione lineare fra le somme delle potenze simili delle radici dell'equazione $f(z) = 0$. Considerando allora corrispondenze R in numero sufficiente, si potranno dalle dette relazioni ricavare i valori di tali somme, e quindi, ricorrendo alle formule di NEWTON, determinare gli invarianti $j_1 j_2 \dots j_p$. Le corrispondenze R che fanno allo scopo sono appunto quelle $R_1 R_2 R_3 \dots$ di cui sopra si è fatto cenno, e che ho chiamato *corrispondenze laterali* sulla curva C della corrispondenza data (n, ν).

Nella 2ª parte del lavoro, studiando il modo come le corrispondenze laterali $R_i\,\bar{R}_i$ sulle curve C e C' si esprimono razionalmente per le $T^{-1}T$ e TT^{-1}, riesco a stabilire delle relazioni fra i numeri delle coincidenze delle corrispondenze laterali medesime, le quali relazioni sono naturali estensioni della formula di ZEUTHEN; esse sono (indicando con h_r il numero delle coincidenze di $\bar{R}_r$):

$$\left.\begin{aligned} h_r - k_r + n(h_1 + h_2 + \dots + h_{r-1}) - \\ - \nu(k_1 + k_2 + \dots + k_{r-1}) = 2n(\bar{\omega} - 1) - 2\nu(p-1) \dots \end{aligned}\right\} \quad (r = 2, 3, \dots).$$

Deduco infine una formula la quale permette di esprimere in funzione degli invarianti j_r i numeri dei *cicli* (catene chiuse) di dato ordine contenuti nella serie γ_n^1.

Fra i risultati che il lettore troverà nel corso della Memoria, il seguente mi sembra di qualche rilievo. Se i sistemi regolari riducibili ∞^{p-1} $\infty^{\bar{\omega}-1}$ di integrali di 1ª specie legati a due involuzioni dei generi p e $\bar{\omega}$ appartenenti ad una medesima curva si intersecano in un sistema regolare $\infty^{\varepsilon-1}$ $(\varepsilon \geq 1)$, questo sistema intersezione è pure legato ad una involuzione del genere ε, di cui le suddette sono componenti. La proprietà sembra degna di nota, se si pensa che la tabella dei periodi ridotti di un sistema regolare ∞^{p-1} della natura particolare suddetta, quando sia normalizzata, dà luogo ad una soluzione delle ignote relazioni fra i moduli trascendenti di una curva del genere p. La proprietà stessa potrebbe quindi gettare qualche luce sulla natura di quelle relazioni.

Attuaria. — GIUSEPPE USAI: *Relazioni fra funzioni biometriche.* Estratto dal « Giornale di Matematica Finanziaria ». Febbraio 1924.

In una Nota dello stesso titolo, l'Autore dimostra che se la funzione di sopravvivenza è quella di DE MOIVRE, la vita probabile è uguale alla metà del complemento di vita.

In questo lavoro invece, si stabilisce in modo esatto la proprietà inversa: se la vita probabile è uguale al semicomplemento di vita e se la funzione di sopravvivenza è derivabile (a sinistra) nell'età estrema, tale funzione è quella del DE MOIVRE (lineare del tempo).

GIUSEPPE USAI: *Considerazioni sul vitalizio e calcoli relativi nelle ipotesi Dormoy e De Moivre.* Estratto dal « Giornale di Matematica Finanziaria ». Aprile-giugno 1924.

È nota l'espressione che dà sotto forma di integrale il premio unico per una rendita vitalizia continua, unitaria, pagabile finchè fra 0 e t un individuo (x) sia in vita.

Si può però al riguardo far uso di una equazione a derivate parziali determinandone una soluzione che si annulli per $t = 0$, e ciò risulta da questo lavoro, nel quale si trova anche lo studio di qualche caso particolare colle verifiche relative di interesse attuariale ed analitico.