Bruto Caldonazzo

Un'osservazióne a proposito del teorema di Bernoulli

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **4** (1925), n.1, p. 1–3.

Unione Matematica Italiana

¡http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1925_1_4_1_1_0¿

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 1925.

PICCOLE NOTE

Un'osservazione a proposito del teorema di Bernoulli.

Nota di BRUTO CALDONAZZO

1. Nel moto stazionario lento di un fluido perfetto, soggetto a forze di massa conservative e con densità dipendente solo dalla pressione, vale il noto teorema di BERNOULLI. Precisamente, indicando U il potenziale delle forze, ρ la densità, p il valore della pressione specifica, v la velocità di un punto generico, il *trinomio*

$$(1) \qquad \Phi = \frac{1}{2} v^2 - U + \int \frac{dp}{\rho}$$

ha valore costante lungo una medesima linea di flusso, potendo variare il valore della costante da una linea all'altra.

Condizione caratteristica [1] affinchè la costante sia la stessa per tutte le linee è che sia in tutti i punti del campo del moto

$$(2) \qquad \boldsymbol{v} \wedge \operatorname{rot} \boldsymbol{v} = 0.$$

Non essendo identicamente $\boldsymbol{v} = 0$, la (2) è verificata nei due casi:

1°) $\operatorname{rot} \boldsymbol{v} = 0$, *(moti irrotazionali)*;

2°) $\operatorname{rot} \boldsymbol{v}$ parallelo a $\boldsymbol{v}$, *(moti di Beltrami)*.

Se non è verificata la (2), cioè se il moto è rotazionale ma non di BELTRAMI, il trinomio Φ ha valore costante, oltre che sulle linee di flusso, anche sulle linee vorticose [2]. Successivamente, è stato fatto notare che lo stesso si verifica su tutte e sole le linee

[1] U. CISOTTI, *Considerazioni sulla nota formula idrodinamica di Daniele Bernoulli*, « Bollettino dell'U. M. I. », anno II, p. 125.

[2] Cfr. loco citato.

per cui è

$$(\boldsymbol{v} + m \operatorname{rot} \boldsymbol{v}) \wedge dP = 0, \tag{3}$$

essendo m una funzione scalare arbitraria del punto P [1].

La questione può essere completata ed in modo semplicissimo colla seguente osservazione, che del resto non è affatto nuova [2].

Notando che Φ è funzione di P, appare manifesto che quando non è verificata la (2), (nel qual caso Φ sarebbe indipendente da P), il trinomio di BERNOULLI ha valore costante sulle superficie di equazione

$$\Phi = \text{costante}. \tag{4}$$

Ognuna di queste superficie è in pari tempo superficie di flusso e superficie vorticosa. Infatti l'equazione di moto del fluido è

$$\boldsymbol{v} \wedge \operatorname{rot} \boldsymbol{v} = \operatorname{grad} \Phi, \tag{5}$$

cosicchè la normale alla superficie, in un suo punto P qualsiasi, è normale tanto a $\boldsymbol{v}$ che a rot $\boldsymbol{v}$ e cioè alla linea di flusso ed alla linea vorticosa passanti per P.

Quindi:

1°) ognuna di queste superficie è il luogo delle linee di flusso sulle quali il trinomio di BERNOULLI (2) ha uno stesso valore;

2°) è il luogo delle linee vorticose sulle quali lo stesso trinomio ha pure lo stesso valore;

3°) una qualsiasi delle linee (3) è tracciata su una di queste superficie.

2. Per la proprietà caratteristica di queste superficie, espressa dalla (4), proporrei di chiamarle *superficie di Bernoulli*. Nel contesto le indicherò anche semplicemente come superficie B.

La distribuzione delle superficie B nello spazio dà pure una semplice rappresentazione geometrica del modo di variare di Φ, quando si passa da un punto all'altro dello spazio, essendo in uno spostamento infinitesimo qualsiasi dP:

$$d\Phi = \boldsymbol{v} \wedge \operatorname{rot} \boldsymbol{v} \times dP,$$

come segue senz'altro dalla (5).

[1] L. c., p. 172.

[2] H. LAMB, *On the condition for steady motion of fluid*, Proc. Lond. Math. Soc., t. IX, p. 91, (1878). Cfr. H. LAMB, *Hydrodynamics*, 4° ediz. n. 165, oppure P. APPELL, *Traité de Méc. Rat.*, t. III, 3° ediz. n. 762.

3. Le superficie di BERNOULLI sussistono anche nei moti stazionari dei fluidi viscosi, qualora sia verificata la condizione

$$\mathrm{rot}^2\, \boldsymbol{v} = 0$$

e quindi $\mathrm{rot}\, \boldsymbol{v} = \mathrm{grad}\, \varphi$, con φ funzione armonica del punto P. Infatti allora l'equazione di moto si riduce alla (5), essendo però in tal caso

$$\Phi = \frac{1}{2}\boldsymbol{v}^2 - U + \int \frac{1}{\rho}\, d\left[p + (\lambda + 2\mu)\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{v}\right]$$

con λ e μ indicando le costanti di LAMÈ relative al fluido [1]. Come si vede questa espressione coincide con l'ordinario trinomio di BERNOULLI se il fluido viscoso è incompressibile.

4. Le superficie B sono completamente determinate una volta assegnata la velocità del fluido, supposto che la (2) non risulti identicamente soddisfatta.

In particolare si possono esprimere tutte le curvature di ciascuna B, in un suo generico punto, mediante $\boldsymbol{v}$.

Questo studio formerà oggetto di una nota speciale. Qui mi limito ad accennare ai seguenti risultati. Posto

$$\boldsymbol{w} = \boldsymbol{v} \wedge \mathrm{rot}\, \boldsymbol{v}, \qquad \sigma = \frac{d}{dP}\left(\frac{\boldsymbol{w}}{w}\right), \qquad w = \mathrm{mod}\, \boldsymbol{w}$$

le due curvature *media* H, *totale* K, sono date rispettivamente da

$$H = I_1\sigma, \qquad K = I_2\sigma$$

dove $I_1\sigma$ e $I_2\sigma$ sono gli invarianti primo e secondo dell'omografia σ.

Milano, 3 novembre 1924.

(1) Cfr. ad es. C. BURALI-FORTI e MARCOLONGO, *Analyse vectorielle générale*, II, p. 63.