BOLLETTINO UNIONE MATEMATICA ITALIANA

PACIFICO MAZZONI

Una proprietà della vita matematica

*Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie
1, Vol. 4 (1925), n.1, p. 10–13.*

Unione Matematica Italiana

[http:
//www.bdim.eu/item?id=BUMI_1925_1_4_1_10_0](http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1925_1_4_1_10_0)

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

Una proprietà della vita matematica.

Nota di PACIFICO MAZZONI

Ci proponiamo di dimostrare una proprietà della vita matematica.

Considerata una funzione continua di sopravvivenza $f(x)$, indicato con i il saggio, con ω l'età estrema, e considerato il vita-

lizio continuo $a_x = \int_0^{\omega-x} \frac{f(x+t)}{f(x)} \cdot e^{-it} dt$, ricordiamo che per vita mate-

matica m s'intende la quantità $m = -\frac{\log(1-ia)}{i}$, la quale soddisfa l'equazione

$$(1) \quad \int_0^m e^{-it} dt = \int_0^{\omega-x} \frac{f(x+t)}{f(x)} \cdot e^{-it} dt = a_x.$$

Considerata m come funzione del saggio i , ci proponiamo di dimostrare:

La derivata della vita matematica rispetto al saggio è sempre negativa.

In un precedente lavoro, pubblicato nel « Giornale degli Economisti e Rivista di Statistica » (nov. 1924), abbiamo dimostrato che m è una funzione decrescente del saggio: qui lo completiamo, dimostrando che $\frac{\partial m}{\partial i}$ è sempre < 0 , e assegnando anche un limite inferiore per il valore numerico di questa derivata.

Riprendiamo la dimostrazione esposta nel lavoro citato. Indichiamo $\frac{f(x+t)}{f(x)}$ con $F(t)$: questa funzione $F(t)$ decresce sempre da 1 a 0, quando t varia da 0 a $\omega - x$.

Scomponiamo l'intervallo 0, $\omega - x$ in n intervalli parziali di uguale ampiezza σ , e poniamo

$$(2) \quad x_1 = \sigma; \quad x_2 = \sigma \cdot F(\sigma); \quad x_3 = \sigma \cdot F(2\sigma) \cdot e^{-i(\sigma-x_2)};$$

$$x_4 = \sigma \cdot F(3\sigma) \cdot e^{-i(2\sigma-x_2-x_3)} \text{ ecc.,}$$

e chiamiamo infine k la somma $x_1 + x_2 + \dots + x_n$. Nel detto lavoro abbiamo dimostrato che k tende precisamente alla vita matematica m quando σ tende a 0.

È evidente che al crescere del saggio le quantità $x_2, x_3, \dots, x_n$ diminuiscono; allora diamo al saggio i un incremento δ , e chiamiamo $x'_1 = x_1; x'_2 = x_2; x'_3; x'_4; \dots$ i nuovi valori delle suddette quantità (corrispondenti al nuovo saggio $i + \delta$). La grandezza x_{r+1} diminuisce allora della quantità

$$x_{r+1} - x'_{r+1} = \sigma \cdot F(r\sigma) \cdot e^{-i(r\sigma-x_1-x_2-\dots-x_r)} - e^{-(i+\delta)(r\sigma-x'_1-x'_2-\dots-x'_r)}$$

che è certamente maggiore di

$$\sigma \cdot F(r\sigma) \cdot e^{-i(r\sigma-x'_1-x'_2-\dots-x'_r)} - e^{-(i+\delta)(r\sigma-x'_1-x'_2-\dots-x'_r)},$$

poichè $x_s > x'_s$ (se $s > 2$). Si ha dunque:

$$x_{r+1} - x'_{r+1} > \sigma \cdot F(r\sigma) \cdot e^{-i(r\sigma-x'_1-\dots-x'_r)} \cdot [1 - e^{-\delta(r\sigma-x'_1-x'_2-\dots-x'_r)}];$$

cioè, per le formule analoghe alle (2) (scritte per il saggio $i + \delta$), abbiamo:

$$x_{r+1} - x'_{r+1} > x'_{r+1} \cdot [1 - e^{-\delta(r\sigma-x'_1-x'_2-\dots-x'_r)}];$$

e ciò qualunque sia $r = 2, 3, \dots, n-1$. Ne segue che la somma $x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n = k$ diminuisce di una quantità $k - k'$ maggiore di

$$x'_3 \cdot [1 - e^{-\delta(2\sigma-x'_1-x'_2)}] + x'_4 \cdot [1 - e^{-\delta(3\sigma-x'_1-x'_2-x'_3)}] + \dots$$

Consideriamo ora il rapporto $\frac{k-k'}{\delta}$, e cerchiamo il suo limite per δ tendente a 0. Siccome per δ tendente a 0 le quantità x'_r tendono a x_r , abbiamo evidentemente:

$$(3) \quad \lim_{\delta=0} \frac{k-k'}{\delta} = -\frac{\partial k}{\partial i} \geq x_3(2\sigma - x_1 - x_2) + x_4(3\sigma - x_1 - x_2 - x_3) +$$

$$x_5(4\sigma - x_1 - x_2 - x_3 - x_4) + \dots$$

Ora supposto che il detto numero n degli intervalli sia pari, abbiamo *a fortiori* dalla (3) (trascurando i primi $\frac{2}{n} - 2$ termini dell'ultimo membro):

$$-\frac{\partial k}{\partial i} > x_{\frac{n}{2}+1} \cdot \left[\frac{n}{2} \sigma - x_1 - x_2 - \dots - x_{\frac{n}{2}} \right] + \\ + x_{\frac{n}{2}+2} \cdot \left[\left(\frac{n}{2} + 1 \right) \sigma - x_1 - x_2 - \dots - x_{\frac{n}{2}+1} \right] + \dots$$

Osserviamo la legge di formazione delle quantità comprese tra le successive parentesi quadre: la seconda si ottiene dalla prima, aggiungendovi $\sigma - x_{\frac{n}{2}+1}$; la terza dalla seconda aggiungendovi $\sigma - x_{\frac{n}{2}+2}$; ecc. Segue allora *a fortiori*, per essere tutte le $x_i < \sigma$, e per essere $n\sigma = \omega - x$:

$$-\frac{\partial k}{\partial i} > x_{\frac{n}{2}+1} \cdot \left(\frac{\omega - x}{2} - x_1 - x_2 - \dots - x_{\frac{n}{2}} \right) + \\ + x_{\frac{n}{2}+2} \cdot \left(\frac{\omega - x}{2} - x_1 - x_2 - \dots - x_{\frac{n}{2}} \right) + \dots$$

da cui infine:

$$(4) \quad -\frac{\partial k}{\partial i} > \left(x_{\frac{n}{2}+1} + x_{\frac{n}{2}+2} + \dots + x_n \right) \cdot \left(\frac{\omega - x}{2} - x_1 - x_2 - \dots - x_n \right).$$

Ora se si fa tendere σ a 0, allora k tende alla vita matematica m (V. lavoro citato) e *analogamente la quantità* $x_1 + x_2 + \dots + x_n$ *tende al numero* p *definito dalla relazione*

$$(5) \quad \int_0^p e^{-it} dt = \int_0^{\frac{\omega-x}{2}} \frac{f(x+t)}{f(x)} dt;$$

mentre la somma $x_{\frac{n}{2}+1} + x_{\frac{n}{2}+2} + \dots + x_n$ tende allora alla quantità $m - p$. Risulta quindi dalla (3), passando al limite per σ tendente a 0:

$$-\frac{\partial m}{\partial i} \geq (m - p) \cdot \left(\frac{\omega - x}{2} - p \right).$$

Ma essendo la funzione di sopravvivenza decrescente (basterebbe che non fosse mai crescente, e non fosse costante nell'inter-

vallo $0, \frac{\omega-x}{2}$, e neppure nell'intervallo $\frac{\omega-x}{2}, \omega$, si ha dalle (1) e (5) che $p < m$, e $p < \frac{\omega-x}{2}$; ne consegue che la quantità $-\frac{\partial m}{\partial i}$ è positiva, cioè che $\frac{\partial m}{\partial i}$ è negativa. Abbiamo dunque dimostrato il teorema che la derivata della vita matematica rispetto al saggio è negativa, e abbiamo inoltre trovato, per il suo valore assoluto, la relazione seguente:

$$\left| \frac{\partial m}{\partial i} \right| \geq (m-p) \cdot \left(\frac{\omega-x}{2} - p \right),$$

ove p è la quantità che soddisfa la (5).

Bari, ottobre 1924