

---

# BOLLETTINO UNIONE MATEMATICA ITALIANA

---

UMI

## Recensioni

- \* L. Bianchi, Lezioni sulla teoria dei numeri algebrici.
- \* H. Galbrun, Assurances sur la vie: Calcul des primes
- \* F. Enriques. Gli elementi di Euclide e la critica antica e moderna

*Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie  
1, Vol. 3 (1924), n.5, p. 226–232.*

Unione Matematica Italiana

[http:  
//www.bdim.eu/item?id=BUMI\\_1924\\_1\\_3\\_5\\_226\\_0](http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1924_1_3_5_226_0)

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

---

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma  
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)  
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

## RECENSIONI

L. BIANCHI: *Lezioni sulla teoria dei numeri algebrici*. Bologna, N. Zanichelli, 1923 (continuazione e fine).

Nel Cap. VI « *Congruenze di numeri rispetto ad ideali. Estensione delle teorie di aritmetica razionale* » viene posta innanzi tutto la definizione di congruenza. La relazione  $\alpha \equiv \beta \pmod{A}$  come per gli interi indica che la differenza  $\alpha - \beta$  appartiene all'ideale  $A$ . In un corpo, di numeri incongrui rispetto all'ideale  $A$  ne esistono soltanto  $NA$ ; indicando poi con  $\Phi(A)$  il numero dei numeri di un sistema completo di resti modulo  $A$  che sono primi con l'ideale  $A$  si ha per la  $\Phi$  (generalizzazione della funzione numerica  $\varphi(n)$  di GAUSS) la formula  $\Phi(A) = NA \left(1 - \frac{1}{NP_1}\right) \left(1 - \frac{1}{NP_2}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{NP_r}\right)$  ove  $P_1, P_2, \dots, P_r$  indicano gli ideali primi essenzialmente distinti divisori di  $A$ .

Si prova quindi il teorema di FERMAT-EULERO  $\alpha^{\Phi(A)} \equiv 1 \pmod{A}$  dove  $\alpha$  è un numero primo con l'ideale  $A$ , e come nell'aritmetica razionale si pongono le definizioni di *esponente*  $\delta$  cui appartiene un numero  $\alpha$  primo con l'ideale  $A$  rispetto al modulo  $A$  [il più piccolo numero  $\delta$  per il quale si abbia  $\alpha^\delta \equiv 1 \pmod{A}$ ] e di *radice primitiva* rispetto ad un modulo  $A$ .

Si studiano infine le congruenze quadratiche rispetto ad un modulo primo, e si effettua nei corpi quadratici la riduzione dei noti simboli di DIRICHLET agli ordinari simboli di LEGENDRE.

Il Cap. VII « *Equivalenza delle classi. Numero finito delle classi. Gruppo di composizione delle classi. Forme scomponibili coordinate agli ideali* » introduce nella teoria dei corpi algebrici la nozione fondamentale di *ideali equivalenti*. Due ideali  $A$  e  $B$  si dicono equivalenti quando hanno a comune un ideale moltiplicatore  $C$  ( $AC$  e  $BC$  sono ideali principali generati da un numero razionale positivo) e quindi tutti gli ideali moltiplicatori (DEDEKIND). L'equivalenza degli ideali soddisfa la legge transitiva, perciò gli ideali possono distribuirsi in *classi di ideali equivalenti tra loro*. Un semplice ragionamento del MINKOWSKI prova che il numero  $h$  delle classi è finito; posto poi il concetto di *composizione delle classi* (classe

dell'ideale prodotto di due ideali contenuti rispettivamente in ciascun fattore) si arriva al teorema: Fissato numericamente il corpo  $K(\theta)$  che si considera, si può con un numero *finito* di operazioni determinare il numero  $h$  delle classi, trovare un sistema completo di  $h$  ideali rappresentanti le classi, e le loro leggi di composizione.

Considerando un sistema completo di  $h$  classi,  $C_1 \equiv 1, C_2, \dots, C_h$ : moltiplicandole tutte per una classe  $C_i$  si produce nelle  $h$  classi una sostituzione  $S_i$ , e le  $h$  sostituzioni  $S_i$  formano un gruppo Abeliano, il *gruppo di composizione delle classi*. Si arriva a questo punto alla connessione tra il concetto di ideale secondo DEDEKIND e il primitivo concetto di *fattore ideale* di KUMMER. Se  $A$  è un ideale,  $A^h$  è certamente uguale ad un ideale principale  $(\gamma)$ . Posto  $\gamma_0 = \sqrt[h]{\gamma}$ , il numero  $\gamma_0$  a meno che  $A$  sia un ideale principale non è nel corpo  $K(\theta)$ , ma tutti i multipli di  $\gamma_0$  nel corpo  $K(\theta)$  formano l'ideale  $A$ . Sono appunto questi numeri  $\gamma_0$  introdotti come elementi *fittizi*, fattori *ideali* del corpo  $K(\theta)$ , che permettono a KUMMER di ristabilire le leggi della divisibilità nei corpi algebrici.

Nel Cap. VIII « *Decomposizione dei numeri primi razionali e congruenze di grado superiore. Caratteristica dei numeri primi critici secondo Dedekind. Ideali primi nei corpi circolari* » si espongono dapprima alcune nozioni sopra le congruenze di grado superiore rispetto ad un modulo primo razionale  $p$ , e passando poi alla decomposizione dei numeri primi razionali si prova il teorema di DEDEKIND. Se  $f(\theta) = \theta^n + a_1\theta^{n-1} + \dots + a_{n-1}\theta + a_n = 0$  è l'equazione fondamentale del numero  $\theta$ , supposto che il numero razionale primo  $p$  non divida il determinante  $C$  della sostituzione con la quale da una base minima del corpo  $K(\theta)$  si passa alla base  $(1, \theta, \theta^2, \dots, \theta^{n-1})$  [cioè l'*indice* del numero rispetto alla base minima prescelta (DEDEKIND)], la decomposizione dell'ideale principale  $(p)$  nei suoi fattori ideali primi si ottiene componendo (modulo  $p$ ) in polinomi irriducibili  $Q_i(x)$  il polinomio  $f(x)$ , e ove si abbia  $f(x) \equiv Q_1^r(x)Q_2^s(x) \dots Q_r^r(x) \pmod{p}$  è  $(p) = P_1^{r_1}P_2^{r_2} \dots P_r^{r_r}$ , dove  $P_i = [p; Q_i(\theta)]$  è un ideale un ideale primo di grado  $f_i$ ; uguale al grado del polinomio  $Q_i(x)$ .

DEDEKIND ha osservato che esistono però dei corpi nei quali *tutti* gli indici dei numeri del corpo ammettono divisori primi *fissi* (*numeri primi eccezionali*) e ad HENSEL è dovuto un procedimento per la loro decomposizione.

Continuando ancora l'esame della decomposizione dei numeri primi razionali, DEDEKIND scoprì per i divisori razionali primi del numero fondamentale (*numeri primi critici*) il teorema seguente

che ne caratterizza il loro comportamento speciale. I numeri primi divisori del numero fondamentale e questi soltanto sono divisibili per il quadrato di qualche ideale primo.

Chiude infine il capitolo lo studio dei *corpi circolari* (corpi delle radici  $n^{\text{me}}$  dell'unità) per i quali KUMMER proseguendo le celebri ricerche di GAUSS riconobbe la necessità dell'introduzione dei *fattori ideali*.

Il Cap. IX « *Ordini nei corpi algebrici. Unità negli ordini. Ideali regolari e loro leggi di decomposizione. Corpi di Galois* » è l'ultimo del libro destinato alla parte algebrica della teoria. In esso si pongono prima i concetti di *modulo a  $n$  termini* ( $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ ) (insieme di tutti i numeri contenuti nella forma  $h_1\alpha_1 + h_2\alpha_2 + \dots + h_n\alpha_n$  con le  $h_i$  interi razionali arbitrari, e con le  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$   $n$  costanti fondamentali indipendenti del corpo), di *ordine  $R$  (DEDEKIND) del modulo  $M = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$*  (il campo di integrità costituito da tutti e solo quegli interi del corpo che moltiplicati per qualunque numero di  $M$  danno un altro numero di  $M$ ), di *ideale conduttore  $F$  di un ordine  $R$*  (l'insieme dei numeri  $f$  di  $R$  tali che si abbia  $f\omega_i \equiv 0 \pmod{R}$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ ; essendo  $(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n)$  la base del corpo). Studiando la struttura degli ordini si trova che tutti gli ideali contenuti in essi sono multipli del loro ideale conduttore, e per le loro unità vale il teorema di DIRICHLET. Studiando poi gli *ideali relativi  $I$  di un ordine  $R$* , cioè i sistemi di infiniti numeri di  $R$  che rispetto ad  $R$  si possano considerare come un suo ideale, si dimostra che *tra gli ideali relativi regolari  $I$  di un ordine* [(HILBERT) il massimo comune divisore di  $I$  e dell'ideale conduttore  $F$  di  $R$  è l'ordine stesso  $R$ ] e gli ideali assoluti primi col conduttore  $F$  può stabilirsi una corrispondenza biunivoca la quale permette di trasportare senz'altro a quest'ultimi i teoremi sulla decomposizione degli ideali assoluti.

L'A. passa poi a studiare i *corpi normali* di GALOIS (i corpi generati da tutte le radici dell'equazione fondamentale coincidono) e i loro *sottocorpi*, i *corpi Abeliani* (corpi per i quali la corrispondente equazione fondamentale è Abeliana) e stabilisce infine la nozione fondamentale di *composizione dei corpi*.

Gli ultimi due capitoli dell'opera sono dedicati ai principi dell'aritmetica analitica.

Il Cap. X « *Primi principi di aritmetica analitica. Le funzioni zeta di Riemann e Dedekind e la determinazione trascendente del numero  $h$  delle classi* » si apre con un rapido cenno delle proprietà dei prodotti infiniti e con la dimostrazione di una formula di EULERO sulla trasformazione di un prodotto infinito in serie. Applicando questa formula alla *funzione zeta-Riemanniana*  $\zeta(s) = \sum_n \frac{1}{n^s}$

definita nel semipiano  $R(s) > 1$  e con la somma estesa a tutta la serie dei numeri naturali 1, 2, 3, ... si trova per la  $\zeta(s)$  l'espressione  $\zeta(s) = \prod_{p} \frac{1}{1-p^{-s}}$  col prodotto esteso a tutti i numeri primi 2, 3, 5, ...

La funzione  $\zeta(s)$  è prolungabile in tutto il piano complesso  $s$ , e rimane ivi una funzione sempre finita, continua e monodroma di  $s$ , eccettuato il punto  $s=1$  ove ha una singolarità polare del primo ordine col residuo 1; l'A. ne effettua soltanto il prolungamento nel semipiano  $R(s) > 0$ , deducendone la formula  $\lim_{s \rightarrow 1} (s-1)\zeta(s) = 1$ .

Viene quindi definita nel semipiano  $R(s) > 1$  la funzione finita, continua e monodroma di  $s$ ,  $\zeta_k(s)$  di DEDEKIND con la formula  $\zeta_k(s) = \sum (NA)^{-s}$  e con la somma estesa a tutti gli ideali  $A$  di un corpo  $K(\theta)$ . La funzione  $\zeta_k(s)$  è finita, continua e monodroma, prolungabile in tutto il piano complesso, con una singolarità polare del primo ordine in  $s=1$  (HECKE); l'A. si limita però allo studio della singolarità polare della  $\zeta_k(s)$  per  $s=1$  alla quale il numero  $h$  delle classi del corpo  $k(\theta)$  è legato dalla formula capitale di DEDEKIND

$$h = \frac{1}{g} \lim_{s \rightarrow 1} (s-1)\zeta_k(s),$$

essendo la costante  $g = \frac{2^{\nu} \pi^{n-\nu} L}{k \sqrt{|D|}}$ , ove  $n$  è il grado del corpo,  $D$  il suo numero fondamentale,  $k$  il numero delle radici dell'unità del corpo,  $\nu$  il numero complessivo delle radici reali e delle coppie di radici immaginarie dell'equazione fondamentale,  $L$  (regolatore del corpo) un particolare numero che si esprime per i logaritmi coniugati di un sistema fondamentale di unità indipendenti del corpo.

Nell'XI e ultimo Cap. « *Il numero  $h$  delle classi nei corpi quadratici e nei corpi circolari e il teorema di Dirichlet sulle progressioni aritmetiche* » è tracciata la via per determinare per i corpi quadratici e i corpi circolari il numero  $h$  in modo che il risultato renda evidente la natura del numero  $h$  delle classi come intero positivo.

Nel caso di un corpo quadratico di cui  $D$  sia il numero fondamentale si espone preliminarmente un procedimento di DEDEKIND per il prolungamento analitico della funzione  $\zeta_k(s)$  nel semipiano  $R(s) > 0$  e si effettua poi la sommazione della serie ottenuta nel caso  $D \equiv 1 \pmod{4}$ ; per i corpi immaginari si arriva così al singolare teorema di JACOBI: Il numero  $h$  delle classi di un corpo

quadratico immaginario con numero fondamentale  $D = -P = 1$  (mod. 4) è espresso dalle due formule  $h = \sum_{\alpha'=1}^{\alpha'-1/2(P-1)} \left(\frac{\alpha'}{P}\right)$  per  $P \equiv 7$  (mod. 8);  $h = \frac{1}{3} \sum_{\alpha'=1}^{\alpha'-1/2(P-1)} \left(\frac{\alpha'}{P}\right)$  per  $P \equiv 3$  (mod. 8), ove  $\alpha'$  percorre i numeri interi primi con  $P$  dell'intervallo  $\left(1, \frac{P-1}{2}\right)$ .

Viene in un secondo tempo studiato l'altro classico esempio trattato da KUMMER della determinazione del numero delle classi di un corpo circolare e per i corpi  $K\left(e^{\frac{2\pi i}{q^r}}\right)$  con  $q$  primo, si arriva ad una prima espressione di KUMMER del numero  $h$  delle classi. La determinazione del numero  $h$  delle classi nel caso generale di un corpo  $K\left(e^{\frac{2\pi i}{m}}\right)$ , con  $m$  intero razionale qualsiasi, è connessa allo studio di particolari serie aritmetiche delle cui proprietà si serve l'A. per esporre la celebre dimostrazione di DIRICHLET del teorema (enunciato da LEGENDRE): In ogni progressione aritmetica  $mx + r$  con i numeri  $m$  ed  $r$  primi tra loro sono contenuti infiniti numeri primi.

Per apprezzare il valore di un tale libro insufficiente è la sommaria citazione degli argomenti che io ne ho fatta, come insufficiente ne sarebbe una qualsiasi più larga sintesi; occorre che esso venga letto e allora lo studioso lo dirà indispensabile.

GIOVANNI SANSONE

La N. d. R. a pag. 128 aveva unicamente lo scopo di ricordare come, nelle citate *Lezioni di Calcolo infinitesimale*, si fosse per la prima volta insistito sulla necessità dell'ordinamento. Non si alludeva con ciò alla nuova definizione di limite proposta nel suo Trattato dal prof. PICONE, sulla quale l'egregio Autore ci ha promesso una Nota per il *Bollettino dell'Unione Matematica Italiana*.

H. GALBRUN, *Assurances sur la vie: Calcul des primes*. (Paris, Gauthier-Villars, 1924).

Sotto la direzione di É. BOREL, il GAUTHIER-VILLARS pubblica un « *Traité du calcul des Probabilités et des ses Applications* »; il tomo III è dedicato alle « *applications de la théorie des probabilités aux Sciences économiques et biologiques* » e di questo tomo III il primo fascicolo è il libro del GALBRUN.

Nel Cap. I, premesse le formule fondamentali di matematica finanziaria, sono studiate applicazioni dei teoremi di BERNOULLI e di TCHEBICHEFF alle operazioni finanziarie a scadenza fortuita (prestiti ammortizzabili per obbligazioni estratte a sorte, nei riguardi del sottoscrittore) ed è accennato al principio su cui si fonda il calcolo dei premi e delle riserve.

Nel Cap. II si tratta delle tavole di mortalità; delle funzioni dedotte dalle leggi di sopravvivenza; della legge di MAKEHAM; dello studio dei tassi di mortalità; delle cause che influiscono sulla mortalità; della selezione; della perequazione delle tavole; dell'ordine di grandezza dell'errore che affettano i tassi di mortalità.

Il Cap. III è dedicato alla determinazione di formule di interpolazione e di sommazione, fra le quali le più importanti di LUBBOK e di EULERO, di cui nei capitoli seguenti si fa larghissimo uso.

Il Cap. IV tratta del Capitale differito e delle rendite vitalizie sopra una testa, annue, frazionate, continue, sia a termini costanti sia a termini che variano in progressione aritmetica.

Nel Cap. V è studiata l'assicurazione in caso di morte sopra una testa, sia se il capitale è fisso, sia se cresce in progressione aritmetica.

Nel Cap. VI si studiano le probabilità di vita e di morte per un gruppo di teste, per farne applicazione al Capitale differito e alla rendita vitalizia e all'assicurazione di un capitale nel caso di un gruppo che si scioglie al primo decesso, o nel caso di un gruppo che si scioglie all'ultimo decesso.

Nel Cap. VII si studia l'assicurazione di un capitale di sopravvivenza sia nel caso che questo sia costante sia che cresca in progressione aritmetica e le rendite di sopravvivenza, prima relativamente a un gruppo di due teste, poi relativamente a gruppi di più teste che si sciogliono al primo o all'ultimo decesso.

Il Cap. VIII è dedicato al passaggio dai premi puri ai premi di tariffa, alle principali combinazioni di assicurazioni sulla vita e alle operazioni tontinarie.

Chiude il libro un'appendice contenente osservazioni sopra le probabilità di morte e la legge degli errori.

Il libro è fatto molto bene; si riconosce immediatamente che è l'opera di un analista che si è dedicato allo studio della matematica attuariale; perciò con armonico equilibrio è contemporaneo il rigore matematico alle esigenze della pratica attuariale. La redazione è quanto mai chiara. Approvo incondizionatamente il modo con cui il GALBRUN fa uso del *continuo*; nella trattazione delle rendite vitalizie prima sono studiate le rendite vitalizie annue, poi le frazionate, poi le continue; mentre nel calcolo del premio unico puro nell'assicurazione in caso di morte si comincia col determinare un'integrale per arrivare, per approssimazione, alla solita formula coi simboli di commutazione. Il diverso procedere è giustificato pienamente dalla natura delle cose ed è,

secondo me, l'unico logico. Codesta questione mi sembra tanto interessante da non poterne trattare, colla necessaria ampiezza, in una recensione; per ciò mi riservo di farne oggetto di uno studio particolare.

F. SIBIRANI

F. ENRIQUES. *Gli elementi di Euclide e la critica antica e moderna*, editi col concorso di diversi collaboratori. Roma, Stock, 1925, Libri I-IV, pag. 323.

È questo il primo volume di una intera collezione « *Per la storia e la filosofia delle matematiche* », diretta da FEDERIGO ENRIQUES, e presenta il massimo interesse per i docenti di matematiche, per cui gli Elementi di Euclide, più o meno trasformati da una elaborazione moderna, sono l'argomento dei corsi geometrici; ed ha ovvia importanza per qualunque cultore della Storia delle matematiche.

Il volume comincia con una introduzione che assegna la posizione storica occupata dagli Elementi di Euclide, e offre una ampia bibliografia dei testi e dei commenti euclidei: greci, arabi, del rinascimento, e moderni. Seguono poi, tradotti tenendo conto del testo critico di HEIBERG e commentati, i primi quattro libri degli Elementi, al cui contenuto, notissimo, brevemente accenniamo.

Il I libro, è curato da F. ENRIQUES e M. T. ZAPPELLONI, contiene le definizioni e i postulati fondamentali, le proposizioni relative agli angoli, ai triangoli, alle parallele, e anche alcuni teoremi sull'equivalenza, terminando col teorema di PITAGORA.

Il II libro, curato da M. T. ZAPPELLONI, contiene sostanzialmente la teoria dell'equivalenza delle figure piane.

Il libro III, curato da A. ENRIQUES, tratta la teoria del cerchio.

Il libro IV, curato da A. AGOSTINI, studia i problemi dell'inserivere o circoscrivere una figura ad un'altra; in particolare la costruzione dei poligoni regolari, inscrittibili in un cerchio.

In tutti i libri è notevole il commento dei diversi editori, che tuttavia segue un'unica direttiva: i confronti delle varie proposizioni fra loro, riferimento dei principali commenti antichi e moderni, osservazioni critiche, indicazioni bibliografiche. Particolarmente importante è il commento storico-filosofico al libro I, che appare necessario conoscere per una retta e adeguata intelligenza delle definizioni euclidee e di tutto l'ordinamento che Euclide stesso ha dato al suo libro.

O. CHISINI