UMI

Sunti di lavori esteri

* Lavori di: H. Bohr, Georges J. Rémoundos

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **3** (1924), n.5, p. 221–226.

Unione Matematica Italiana

¡http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1924_1_3_5_221_0¿

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 1924.

SUNTI DI LAVORI ESTERI

Acta Mathematica, T. 45, fasc. 1 e 2. — Segnaliamo questo fascicolo dell'importante periodico, fascicolo pubblicato nell'estate scorso, e che, insieme ad una prefazione del suo fondatore e principale redattore G. MITTAG-LEFFLER, contiene una preziosa ed inedita conferenza di CARLO WEIERSTRASS, tenuta dal Grande matematico nel Seminario matematico dell'Università di Berlino il 28 maggio 1884. Seguono quattro interessanti memorie; di I. FREDHOLM, su un'equazione integrale a nucleo analitico; di H. BOHR, sulla teoria delle funzioni dette dall'Autore « fastperiodisch » o quasi periodiche: lavoro di grande importanza e di cui siamo lieti di poter offrire ai Soci dell'U. M. I., in queste pagine, un sunto gentilmente favoritoci dall'A; di S. MANDELBROJT, sulla definizione delle funzioni analitiche; infine, di O. OYSTEIN, ulteriori ricerche sulla teoria dei corpi algebrici, continuazione di studi iniziati dall'A. in una Memoria del T. 44 dello stesso periodico.

H. BOHR (a Copenhagen). — *Una generalizzazione della teoria delle serie di Fourier.*

Mi permetto di presentare, nelle seguenti pagine, e dietro cortese invito del Presidente dell'U. M. I., un breve sunto di un lavoro da me pubblicato nel T. 45 degli « Acta Mathematica », sotto il titolo: *Sulla teoria delle funzioni quasi periodiche. Mem. I.: una generalizzazione della teoria delle serie di Fourier.*

Le funzioni $f(x)$ della variabile reale x, ch'io considero, vengono supposte definite e continue in tutto l'intervallo $-\infty < x < \infty$.

Per comodità, ho preferito considerare oscillatori complessi $e^{ix} = \cos x + i \operatorname{sen} x$ piuttosto che operare su oscillatori reali $\cos x$, $\operatorname{sen} x$, ed è ammissibile che la $f(x)$ sia complessa, $f(x) = u(x) + iv(x)$.

Affinchè una funzione $f(x)$ ammetta una decomposizione in *oscillatori armonici*, cioè uno sviluppo in serie della forma

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{inkx},$$

dove gli esponenti nk formano una progressione aritmetica, è *eo ipso* necessario che essa sia periodica col periodo $p = \frac{2\pi}{k}$, ed il classico risultato della teoria delle serie di FOURIER dà — in linea generale — questa condizione della periodicità come sufficiente per la detta decomposizione armonica.

Nella mia Memoria viene cercato di porre la teoria delle serie di FOURIER su di una base più larga, sostituendo una decomposizione più generale a quella di una funzione in oscillatori armonici. *Quali funzioni* f(x) *si potranno in generale decomporre in una successione numerabile di oscillatori periodici, cioè in una serie della forma*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{i\lambda_n x}$$

forma dove gli esponenti λ_n *sono numeri reali, del tutto qualsiansi (non prefissati) mentre i coefficienti* a_n *sono costanti complesse?*

Si trova non difficilmente, e guidati da esempi semplici, che deve entrare in gioco una certa specie di *periodicità in senso lato*. Per meglio renderne conto, introduco, mediante la seguente definizione, il concetto di *numero di trasporto* (1).

Qualora, per una data funzione f(x) $(-\infty < x < \infty)$ *ed un dato* ε (> 0) *esiste un numero* τ *che, per ogni* x, *soddisfi alla disuguaglianza*

$$|f(x+\tau) - f(x)| < \varepsilon,$$

τ *sarà detto «numero di trasporto» della funzione* f(x), *relativo ad* ε.

Alla domanda posta dianzi, si risponde semplicemente che la funzione cercata deve essere caratterizzata dal fatto che esista un *n. d. t.* $\tau = \tau(\varepsilon)$ per ogni $\varepsilon > 0$, e che l'insieme di tutti i *n. d. t.* relativi ad un medesimo ε non abbia mai «lacune» arbitrariamente grandi. Io do a queste funzioni il nome di *«quasi periodiche»* (2). La loro definizione è precisamente la seguente:

Una funzione f(x) *continua per* $-\infty < x < \infty$ *si dirà quasi periodica, quando per ogni* $\varepsilon > 0$ *vi è una lunghezza* $l = l(\varepsilon)$ *tale che ogni intervallo* $\alpha < x < \beta$ *di lunghezza* l *contenga almeno un* n. d. t. $\tau = \tau(\varepsilon)$ *relativo ad* ε.

Per la costruzione della teoria di codeste funzioni, si dimostra dapprima assai semplicemente che ogni tale funzione *è, in tutto l'intervallo* $-\infty < x < \infty$, *limitata ed uniformemente continua*. Segue il teorema essenziale ed alquanto più remoto, *che il concetto di quasi periodicità è invariantivo rispetto alle operazioni razionali di calcolo*: precisamente, che la somma, la differenza ed il

(1) Nel testo tedesco *Verschiebungszahl*. Per il seguito si userà l'abbreviazione *n. d. t.* (Nota del traduttore).

(2) *Fast periodisch* nel testo tedesco.

prodotto di due funzioni quasi periodiche sono sempre quasi periodici, ed anche il quoziente, se il denominatore non può approssimarsi arbitrariamente allo zero. Si trova poi che *la funzione limite di una successione, uniformemente convergente per* $-\infty < x < \infty$, *di funzioni quasi periodiche, è pure quasi periodica.* Da questi teoremi segue subito che la classe delle nostre funzioni non è al certo troppo «*stretta*»: infatti, essendo gli oscillatori periodici $ae^{i\lambda x}$ un caso speciale delle funzioni quasi periodiche, risulta che ogni polinomio $\sum_1^N a_n e^{i\lambda_n x}$ ed ogni serie uniformemente convergente $\sum_1^\infty a_n e^{i\lambda_n x}$ hanno come somma una funzione quasi periodica.

Un problema più difficile è invece quello di mostrare che, inversamente, la classe delle nostre funzioni non è troppo «*larga*»: e precisamente che ogni funzione della classe può effettivamente decomporsi in un numero finito, o in una infinità numerabile di oscillatori puri $a_n e^{i\lambda_n x}$. A punto di partenza della dimostrazione vale la seguente considerazione. Qualora $f(x)$ fosse rappresentabile nella forma $\sum a_n e^{i\lambda_n x}$, si potrebbe tentare di determinare i coefficienti — in perfetta analogia colla determinazione dei coefficienti di una serie di FOURIER $f(x) = \sum a_n e^{inkx}$ che sono dati mediante la formula $a_n = \frac{1}{p}\int_0^p f(x) e^{-inkx} dx$ — moltiplicando la serie per $e^{-i\lambda_n x}$, indi applicando al prodotto il $\lim\limits_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T$. Ed infatti si ottiene subito, in codesto modo, per essere

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T e^{i\mu x} dx = \begin{cases} 0 & \text{per } \mu \lessgtr 0 \\ 1 & \text{per } \mu = 0, \end{cases}$$

una determinazione formale di a_n, e cioè

$$a_n = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T f(x) e^{-i\lambda_n x} dx. \tag{1}$$

Allo svolgimento di questa idea, cioè alla formazione della espressione (1), si oppongono tuttavia due inconvenienti. Anzitutto non si conoscono i valori degli esponenti λ_n (poichè per noi non solo i coefficienti a_n, ma anche gli esponenti λ_n si devono desumere dalla funzione $f(x)$); in secondo luogo, non sappiamo *a priori* se esista il valore medio, poichè esso si riferisce ad un intervallo infinito. A questi due inconvenienti si può però ovviare senza difficoltà. Ed infatti non è difficile di dimostrare che *ogni funzione quasi periodica* f(x) *ammette un valore medio*, che cioè l' espressione

$$\frac{1}{T}\int_0^T f(x)dx$$

ed anche, per ogni funzione $\alpha = \alpha(T)$, l' espressione

$$\frac{1}{T}\int_\alpha^{\alpha+T} f(x)dx$$

tende, per $T \rightarrow \infty$, ad un limite che indicheremo con $M\{f(x)\}$; e ne segue, essendo $e^{-i\lambda x}$ periodica (e quindi anche quasi periodica e perciò lo è pure il prodotto $e^{-i\lambda x}f(x)$), che *per ogni* λ *reale* esiste il valore medio

$$\lim_{T\rightarrow\infty} \frac{1}{T}\int_0^T f(x)e^{-i\lambda x}dx.$$

Indicheremo questo valore medio $M\{f(x)e^{-i\lambda x}\}$ con $a(\lambda)$, e con ciò viene determinata una funzione $a(\lambda)$ definita da $-\infty$ a ∞.

L'altra questione, quella degli esponenti λ_n « appartenenti » alla funzione, si intavola nel seguente modo. Cominciamo col considerare un numero finito di valori λ, siano $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_N$, costruiamo di questi i relativi valori medi $a(\lambda_1), \ldots, a(\lambda_N)$ e formiamo quindi — collegandoci ad un procedimento corrente nella teoria delle funzioni ortogonali — il valore medio

$$M\{|f(x) - \sum_1^N a(\lambda_n)e^{ix\lambda_n}|^2\}.$$

Calcoli di carattere elementare ci portano all' *identità*

$$(2) \qquad M\{|f(x) - \sum_1^N a(\lambda_n)e^{i\lambda_n x}|^2\} = M\{|f(x)|^2\} - \sum_1^N |a(\lambda_n)|^2 .$$

Ne segue senz' altro la *disuguaglianza*

$$(2') \qquad \sum_{n=1}^N |a(\lambda_n)|^2 \leq M\{|f(x)|^2\},$$

dove le λ_n sono numeri reali fra loro diversi, del tutto arbitrari ed in numero qualunque, poichè il primo membro della (2) è il valor medio di una funzione reale certamente ≥ 0. Da questa disuguaglianza concludiamo che per ogni $\delta > 0$ fissato esiste al più un numero *finito* di valori λ pei quali $a(\lambda)$ sia numericamente $> \delta$; ed applicando ciò a $\delta = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3} \ldots$, giungiamo al risultato fondamentale che ***esiste al più un insieme numerabile di numeri*** λ, ***pei quali il valore medio*** $a(\lambda) = M\{f(x)e^{-i\lambda x}\}$ ***è diverso da zero.*** Vi sono dunque valori distinti di λ, che ci danno gli esponenti cercati; li indichiamo (in un qualunque ordinamento determinato) con $\Lambda_1, \Lambda_2, \ldots, \Lambda_n, \ldots$ ed indichiamo con $A_1, A_2, \ldots A_n, \ldots$ i rispettivi valori medi $a(\Lambda_1), a(\Lambda_2), \ldots, a(\Lambda_n), \ldots$ Seguendo HURWITZ nella teoria delle ordinarie serie di FOURIER, scriviamo

$$f(x) \backsim \Sigma A_n e^{i\Lambda_n x},$$

e chiamiamo la serie del secondo membro *serie di Fourier appartenente alla* $f(x)$, e le Λ_n ed A_n rispettivamente *esponenti di Fourier* e *coefficienti di Fourier* della funzione quasi periodica $f(x)$. Faccio subito notare come la denominazione di « serie di FOURIER » per la nostra serie $\Sigma A_n e^{i\Lambda_n x}$ è lecita in quanto, come è facile vedere, essa ricade sulla ordinaria serie di FOURIER se la $f(x)$ è propriamente periodica. Faccio ancora notare, cosa pure facile a vedersi, che gli esponenti Λ_n non sono assoggettati ad alcuna condizione, nel senso che una successione numerabile qualsiasi di numeri reali può essere assunta come esponente di FOURIER di una funzione quasi periodica da sceglersi convenientemente; codesta successione può dunque essere anche densa in tutto un intervallo.

Con ciò, *ad ogni funzione quasi periodica è subordinata una serie* $\Sigma A_n e^{i\Lambda_n x}$ *univocamente determinata.* *(continua)*

GEORGES J. RÉMOUNDOS, in Atene: *Sopra un teorema generale relativo all'estensione del teorema di Picard agli algebroidi multiformi.*

L'A. ci comunica il seguente breve sunto di un lavoro che comparirà, in lingua francese, negli « Annali di Matematica ».

Sia

$$F(x, u) = u^\nu + A_1(z)u^{\nu-1} + A_2(z)u^{\nu-2} + \ldots + A_{\nu-1}(z)u + A_\nu(z)$$

un polinomio di grado ν in u, i cui coefficienti $A_i(z)$ sono funzioni *qualsivogliano* e consideriamo ν valori finiti o distinti $u_1, u_2, u_3, \ldots u_\nu$ di u.

Poniamo:

$$(1) \qquad \begin{aligned} F(z, u_i) &= f_i(z), \qquad (i = 1, 2, 3, \ldots \nu) \\ F(z, u) &= f(z) \end{aligned}$$

ed eliminiamo la $A^2(z)$ fra queste $\nu+1$ equazioni (1). Il risultato di questa eliminazione

$$(2) \qquad qf(z) + q_1 f_1(z) + q_2 f_2(z) + \dots q_\nu f_\nu(z) = Q.$$

non potrebbe ***decomporsi*** (***spezzarsi***) per più di $\nu - 1$ valori di u diverse delle $u_1, u_2, \dots u_\nu$: se vi sono tali valori, essi verranno detti ***eccezionali***. Essi possono esistere solo se fra le $A_i(z)$ passano relazioni lineari a coefficienti costanti.

In particolare, se vi sono k tali relazioni, il numero dei valori eccezionali delle $u_1, u_2, \dots u_\nu$ è al più uguale a k: d'altronde è evidente che i valori dati u_i sono eccezionali, e, per conseguenza, il numero totale dei valori eccezionali non può superare la quantità $k + \nu$, che è uguale al più a $2\nu - 1$ (l'infinito non compreso) poichè è $k \leq \nu - 1$.

Si ha in ciò un teorema ***assai generale di natura puramente algebrica***, di cui un lato ***assai particolare*** è il mio teorema sulla estensione alle funzioni algebriche multiformi del celebre teorema di Picard, che ho enunciato nel 1903 e pubblicato nei suoi particolari nella mia tesi di laurea presso l'Università di Parigi e simultaneamente negli « Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse ».

15 ottobre 1924.