UMI

Sunti di lavori italiani

* Lavori di: A. Bedarida, E. Maccaferri, Margherita Piazzola - Beloch, G. Sansone

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **3** (1924), n.5, p. 216–219.

Unione Matematica Italiana

¡http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1924_1_3_5_216_0¿

SUNTI DI LAVORI ITALIANI

I.

A. Bedarida: *Un problema al contorno in un tipo di equazioni integro-differenziali* (in corso di stampa nei « Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo »).

Nel presente lavoro viene eseguita la ricerca degli integrali $\varphi(x)$, in un intervallo (a, b), dell'equazione integro-differenziale:

$$\varphi''(x) = \lambda \left[\int_a^x k_1(x, y)\varphi(y)dy + \int_a^x k_2(x, y)\varphi'(y)dy \right] + f(x),$$

soddisfacenti alle condizioni al contorno:

$$\begin{cases} \alpha_1\varphi(a) + \alpha_2\varphi'(a) + \alpha_3\varphi(b) + \alpha_4\varphi'(b) = 0 \\ \beta_1\varphi(a) + \beta_2\varphi'(a) + \beta_3\varphi(b) + \beta_4\varphi'(b) = 0 \end{cases} \qquad (\alpha_i \text{ e } \beta_i \text{ costanti}).$$

Tale ricerca è ricondotta allo studio di una notevole equazione integrale lineare di *tipo misto*.

II.

— *Ricerche sopra il numero delle classi di forme aritmetiche di Hermite* (in corso di stampa negli « Annali di Matematica »).

In questa Memoria è studiato il problema della determinazione delle relazioni tra i numeri delle classi $h(\Delta)$ e $h(\Delta')$, delle forme aritmetiche di Hermite, in un corpo quadratico immaginario generale $k(\sqrt{-d})$, quando tra i determinanti Δ e Δ' esiste la relazione $\Delta' = \Delta m m_0$. Il metodo eseguito risale al Lipschitz, il quale se ne servì per risolvere il problema analogo per le forme di Gauss e di Dirichlet. Per le forme di Hermite tale metodo riceve un più vasto, più profondo e più vario sviluppo (considerazioni geometriche vengono ad aggiungersi alle considerazioni aritmetiche).

L'attuale lavoro esaurisce il problema per il caso delle forme definite, appartenenti ai corpi $k(\sqrt{-d})$ privi di ideali secondari. I risultati, inattesi e nuovi, a cui si ~~perviene~~, si possono riassumere nelle due formule:

$$(1) \qquad h(\Delta\mu\mu_0) = n_1 h_1(\Delta) + n_2 h_2(\Delta)$$

$$(2) \qquad h(\Delta\mu\mu_0) = n_1 h_1(\Delta) + n_2 h_2(\Delta) + n_3 h_3(\Delta),$$

ove: μ è un intero del corpo che si considera, tale che l'ideale (μ), (principale), sia primo; n_1, n_2 ed n_3 sono interi razionali, $h_1(\Delta)$, $h_2(\Delta)$ ed $h_3(\Delta)$ sono i numeri delle classi delle forme definite di HERMITE (primitive), rispettivamente a gruppo automorfo aritmetico del 2°, 4° e 6° ordine.

È notevole rilevare che, mentre per le forme di GAUSS e di DIRICHLET, il LIPSCHITZ trovò che il numero $h(\Delta\mu\mu_0)$ ha un'espressione monomia, per le forme di HERMITE (definite) ha invece un'espressione binomia o trinomia. Qui si ha uno dei punti in cui la teoria delle forme aritmetiche di HERMITE si scosta di più dalla teoria delle forme aritmetiche di GAUSS e di DIRICHLET.

In due lavori successivi sarà completato: il caso delle forme definite di HERMITE col considerare tali forme in corpi $k(\sqrt{-d})$ aventi ideali secondari: in questi corpi, la forma algebrica delle (1) e (2) viene mantenuta, ma assumono valori diversi i numeri n_1, n_2 ed n_3; e la ricerca per le forme indefinite di HERMITE. Per queste ultime, la presenza del gruppo automorfo aritmetico infinito porta in campo nuovi e notevoli sviluppi.

III.

Sopra le forme definite di Hermite (in corso di stampa negli « Atti della Società Ligustica »).

Nella presente Nota viene osservato come le considerazioni generali, svolte nella Memoria precedente, possano servire, in alcuni casi speciali, a determinare effettivamente il numero delle classi delle forme definite di HERMITE. Notiamo qui, ad es., che il numero delle classi delle forme di HERMITE, nel corpo $k(\sqrt{-1})$, primitive di prima specie, a determinante $-q$, q primo razionale, $\equiv 1 \pmod{4}$, è dato dalla formula semplicissima:

$$h(-q) = \frac{q-1}{4} + 2.$$

Aritmetica. — E. MACCAFERRI: *Saggio di una nuova teoria analitica dei numeri razionali*, nel « Bollettino di Matematica », **1924**, fasc. I.

Introdotti comunque i numeri interi, si considerano le coppie di interi x/y, ove $x \neq 0$, e x, y primi tra loro: le coppie $x/1$ si assumono a « rappresentare » gli interi x, e le coppie x/y, ove

$y > x$, si chiamano *numeri frazionari*. I numeri interi ed i numeri frazionari costituiscono i *numeri razionali*.

Su queste basi viene svolta la teoria dei numeri razionali, nella quale le frazioni ordinarie non irriducibili della teoria comune, compaiono prima come dei simboli rappresentativi dei numeri razionali, poi come dei quozienti di razionali interi.

MARGHERITA PIAZZOLA-BELOCH: *Costruzione di curve sghembe aventi il massimo numero di circuiti* (in corso di stampa negli *Annali di Matematica pura ed applicata*).

Mentre nel piano il metodo di « piccola variazione » è stato applicato per dedurre svariati tipi di curve d'ordine assegnato, aventi il massimo numero di circuiti, ricorrendo a diverse curve ausiliarie, per le curve sghembe di dato ordine, dotate del massimo numero di circuiti, si conoscono soltanto i tipi dedotti da HILBERT con tale metodo, servendosi di una conica ausiliaria, e di una quartica ausiliaria, composta di due circuiti d'ordine dispari.

L'A. fa vedere che, usando una quartica ausiliaria composta di due circuiti *d'ordine pari* si possono costruire, sopra quadriche a punti parabolici o iperbolici, nuovi tipi di curve algebriche sghembe dotate del massimo numero di circuiti e che presentano notevoli configurazioni.

Con lo stesso metodo di HILBERT essa costruisce inoltre nuovi tipi di curve situate sopra quadriche a punti ellittici.

G. SANSONE: *I sottogruppi del gruppo modulare con coefficienti del campo di Jacobi-Eisenstein e un teorema sopra i gruppi finiti.* In pubblicazione negli « Annali di Matematica pura ed applicata ».

L'A. in questa memoria estende ai gruppi di sostituzioni lineari unimodulari con coefficienti del campo di JACOBI-EISENSTEIN $K(2)$ con $\varepsilon = \dfrac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$ le sue precedenti ricerche sui gruppi con coefficienti del campo di GAUSS ([1]), ma risulta subito dallo svolgimento del lavoro che le ricerche possono estendersi ai sottogruppi del BIANCHI con coefficienti di un corpo quadratico immaginario $K(\sqrt{D})$ di cui il poliedro fondamentale si possa limitare con un membro finito di facce e di sfere di riflessione ed abbia un solo vertice improprio, circostanza che si verifica ad es. nei casi $D = 7, 11, 15, 19$.

([1]) Cfr. questo *Bollettino*, anno III, n. 1 pag. 22 e n. 3 pag. 113.

I teoremi principali cui si perviene sono i seguenti:

a) Considerando rispetto al modulo n due sostituzioni $\begin{pmatrix} a, & b \\ c, & d \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \alpha, & \beta \\ \gamma, & \delta \end{pmatrix}$ identiche quando sia $a \equiv \alpha$, $b \equiv \beta$, $c \equiv \gamma$; $d \equiv \delta$ (mod. n) oppure $a \equiv -\alpha$, $b \equiv -\beta$, $c \equiv -\gamma$, $d \equiv -\delta$ (mod. n), si ha che le sostituzioni $\begin{pmatrix} a, & b \\ c, & d \end{pmatrix}$ a determinante ± 1 e con i coefficienti del corpo $K(\varepsilon)$ formano rispetto al modulo n un gruppo finito $G_{2\mu(n)}$ di ordine $2\mu(n)$, essendo

$$(1) \qquad 2\mu(n) = \frac{2}{\lambda} N^3(n) \prod_i^{1\ldots h} \left(1 - \frac{1}{N^2(p_i)}\right)$$

ove $N(n)$ indica la norma del numero n, e nel secondo membro il prodotto è esteso a tutti i fattori primi essenzialmente distinti di n ed è $\lambda = 1$ per $n = \pm 2\varepsilon^\rho$, e $\lambda = 2$ negli altri casi.

b) Il gruppo $G_{2\mu(n)}$ si genera con le tre operazioni:

$$S = \begin{pmatrix} 0, & 1 \\ 1, & 0 \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} 0, & 1 \\ -1, & 1 \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} 0, & -\varepsilon \\ \varepsilon^2, & 0 \end{pmatrix},$$

e per i moduli n non multipli di 4 nè di $(1-\varepsilon)^3$ posto $n = n_1 + n_2\varepsilon$ caratteristiche fra le operazioni del gruppo sono espresse dalle relazioni:

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{c} S^2 = 1, \quad T^3 = 1, \quad U^2 = 1, \quad (SU)^6 = 1, \quad (TU)^3 = 1, \quad (ST^2)^2 = 1, \\ [(US)^2(TU)^2]^{n_1}[(SU)^2(TU)^2(SU)^2]^{n_2} = 1, \\ [(US)^2(TU)^2]^{-n_2}[(SU)^2(TU)^2(SU)^2]^{n_1-n_2} = 1. \end{array} \right.$$

c) Le relazioni (3) non bastano a caratterizzare il gruppo $G_{2\mu(n)}$ per i moduli che contengono il divisore 2^2 o la potenza $(1-\varepsilon)^3$ del divisore $(1-\varepsilon)$ del numero primo critico del corpo. L'eccezione è conseguenza dei seguenti termini:

1°) Tutte le sostituzioni unimodulari con coefficienti del corpo $K(\varepsilon)\begin{pmatrix} 1 + 4ma, & 4mb \\ 4mc, & 1 + 4md \end{pmatrix}$ per le quali il simbolo relativo ai residui quadratici $\left[\dfrac{c}{1 + 4ma}\right]$ abbia il valore $+1$ formano gruppo.

2°) Tutte le sostituzioni unimodulari con coefficienti del corpo $K(\varepsilon)\begin{pmatrix} 1 + 3(1-\varepsilon)ma, & 3(1-\varepsilon)mb \\ 3(1-\varepsilon)mc, & 1 + 3(1-\varepsilon)md \end{pmatrix}$ per le quali il simbolo relativo ai residui cubici $\left[\dfrac{c}{1 + 3(1-\varepsilon)am}\right]_2$ abbia il valore $+1$ formano gruppo.

I procedimenti trovati nelle memorie citate permettono di determinare anche in questi casi eccezionali le ulteriori relazioni fra le S, T, U oltre le (3) che caratterizzano le operazioni del gruppo $G_{2\mu(n)}$.
