Bollettino Unione Matematica Italiana

Marcello Lelli

Sulla contrazione delle vene liquide

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **3** (1924), n.5, p. 206–215.

Unione Matematica Italiana

¡http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1924_1_3_5_206_0¿

Sulla contrazione delle vene liquide [1].

Nota di MARCELLO LELLI

1. In una Memoria presentata nel 1905 al Reale Istituto Veneto di Scienze (Atti, Tomo LXIV) il LEVI-CIVITA diede al coefficiente di contrazione [2] di una vena liquida fluente liberamente nell'aria l'espressione:

$$\mu = \frac{1 - \frac{1}{\Omega V_1^2}\int_\omega v^2 n d\omega \times h}{2 - \frac{\Omega_1}{\Omega_0} k \times h} \tag{1}$$

nella quale v è la velocità del liquido in corrispondenza di un punto generico della parete bagnata ω; V_1 quella degli elementi liquidi che attraversano la sezione contratta Ω_1; n, h, k sono vettori unitari, e gli altri simboli hanno il significato che si deduce dalla Fig. 1. Il liquido era supposto perfetto, il moto permanente e irrotazionale.

[1] Estratto dalla Tesi per la Laurea in Matematica.

[2] Si definisce *coefficiente di contrazione* il rapporto fra l'area della *sezione contratta* (di cui si postula l'esistenza) e l'area della luce di sbocco.

L'Autore proponeva poi una disposizione della luce, riprodotta nella Fig. 2, atta a una contrazione inferiore a $\frac{1}{2}$, poichè,

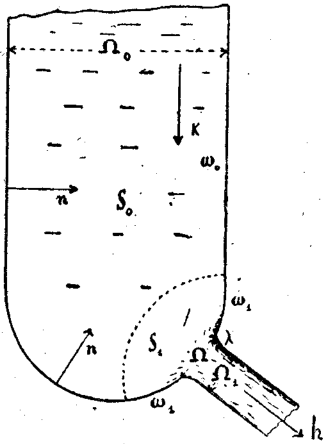

Fig. 1.

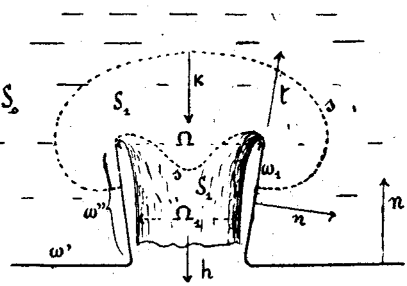

Fig. 2.

essendo presumibilmente trascurabile la velocità sulla parete ω', risulta in tal caso:

(2)
$$\mu = \frac{1 - \frac{1}{\Omega V_1^2}\int_{\omega''} v^2 n d\omega'' \times h}{2},$$

con $n \times h > 0$.

Alcuni anni dopo anche il Cisotti (Atti del Reale Istituto Veneto di Scienze, Tomo LXXIV, 1914-1915) in altra Memoria espose alcune sue riflessioni sull'argomento e propose infine due altri dispositivi (Fig. 3, 4) ai quali convengono rispettivamente i seguenti valori del coefficiente μ:

(3)
$$\mu = \frac{1 - \frac{1}{\Omega V_1^2}\int_{\omega'} v^2 d\omega}{2 + \frac{\Omega_1}{\Omega_0}}$$

(4)
$$\mu = \frac{1 - \frac{1}{\Omega V_1^2}\int_{\omega} v^2 n d\omega \times h}{2 + \frac{\Omega_1}{\Omega_0}},$$

certamente minori di $\frac{1}{2}$.

Se non che esperienze eseguite con l'acqua dal MASONI [1] nell'intento di verificare le previsioni del LEVI-CIVITA diedero un risultato negativo.

Scopo del lavoro qui brevemente riassunto è la giustificazione della mancata conferma sperimentale rilevata dal MASONI, me-

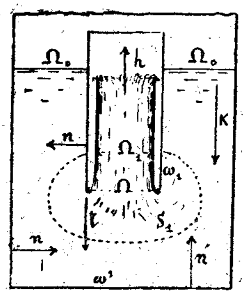

Fig. 3.

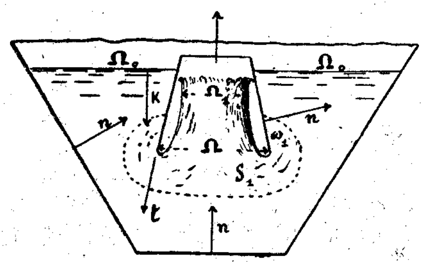

Fig. 4.

diante il calcolo della lieve, ma non trascurabile, influenza che sul fenomeno ha la natura sempre non perfetta dei liquidi che esistono in natura.

Il risultato conseguito, come si rileverà, è poi tale da rendere dubbiosi circa l'esito di esperienze (che non mi consta siano state ancora eseguite) che volessero istituirsi allo scopo di controllare anche le previsioni avanzate dal CISOTTI intorno ai suoi dispositivi.

2. Supponiamo che nel serbatoio rappresentato dalla Fig. 1 scorra un liquido reale, omogeneo, incompressibile, in moto permanente e rotazionale, soggetto a forze esterne conservative.

La sezione piana Ω_0, fatta in una posizione qualsiasi a monte della luce, sia attraversata normalmente da elementi fluidi che posseggono velocità parallele, se bene non eguali.

Se con S si indica lo spazio compreso fra Ω_0, la parete bagnata ω, la superficie λ laterale della vena e la sezione contratta Ω_1, e si esprime l'impulso unitario delle forze agenti entro S, risulta, applicando il teorema del gradiente:

$$(5) \qquad \rho \int_S F dS - \int_S \operatorname{grad} \beta dS = \Omega \rho_1 V_1^2 h - \eta \rho \Omega_0 V_0^3 k,$$

dove ρ è la densità, F la forza agente sull'unità di massa, β l'omografia delle pressioni, V_0 la velocità media su Ω_0, ed η (coefficiente

[1] U. MASONI. *Corso di Idraulica teorica e pratica*. Napoli, 1908, p. 224.

sperimentale pressochè costante per uno stesso liquido) è il rapporto fra la quantità di moto unitaria posseduta dalla corrente reale in corrispondenza di Ω_0 e quella di una corrente fittizia, convogliante una eguale portata, ma animata dalla velocità V_0 in ogni punto della sezione Ω_0.

L'equazione del moto essendo

$$\operatorname{grad} \beta = \rho(\boldsymbol{F} - \boldsymbol{a}),$$

dove $\boldsymbol{a}$ è l'accelerazione, la (5) si semplifica nella

$$\int_S \boldsymbol{a}\, dS = \Omega_1 V_1^2 \boldsymbol{h} - \eta \Omega_0 V_0^2 \boldsymbol{k}. \tag{6}$$

Ma è ancora:

$$\boldsymbol{a} = \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \frac{d\boldsymbol{v}}{dP}\boldsymbol{v} = -\boldsymbol{v} \wedge \operatorname{rot} \boldsymbol{v} + \frac{1}{2} \operatorname{grad} \boldsymbol{v}^2,$$

per cui la (6) diviene:

$$-\frac{1}{2}\int_\sigma \boldsymbol{v}^2 \boldsymbol{n}\, d\sigma - \int_S \boldsymbol{v} \wedge \operatorname{rot} \boldsymbol{v}\, dS = \Omega_1 V_1^2 \boldsymbol{h} - \eta \Omega_0 V_0^2 \boldsymbol{k},$$

se con σ si indica il contorno dello spazio S; relazione che è traducibile in altra, analoga alla (1), mediante lo stesso procedimento (¹) seguito dal LEVI-CIVITA. Risulta:

$$(2\eta - 1)\Omega_0 V_0^2 \boldsymbol{k} + (\Omega - 2\Omega_1) V_1^2 \boldsymbol{h} = \int_\omega \boldsymbol{v}^2 \boldsymbol{n}\, d\omega + 2\int_S \boldsymbol{v} \wedge \operatorname{rot} \boldsymbol{v}\, dS,$$

e infine, posto $\frac{\Omega_1}{\Omega} = \mu$;

$$\mu = \frac{1 - \frac{1}{\Omega V_1^2}\left\{\int_{\omega'} \boldsymbol{v}^2 \boldsymbol{n}\, d\omega + 2\int_S \boldsymbol{v} \wedge \operatorname{rot} \boldsymbol{v}\, dS\right\} \times \boldsymbol{h}}{2 - (2\eta - 1)\frac{\Omega_1}{\Omega_0}\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{h}}, \tag{7}$$

espressione che, come la (1), non è esplicitamente risoluta per μ e che contiene due integrali incogniti, anzichè uno.

Osserveremo subito che nella quasi totalità dello spazio S il moto sarà presumibilmente *regolare* (²). Chiameremo S_0 questo

(¹) La trasparenza della vena fluente permette di ritenere lecito tale procedimento, cioè di considerare isotachia ogni linea di corrente della superficie isobarica λ.

(²) U. PUPPINI. *Sui fondamenti scientifici dell' Idraulica.* Cap. II.

spazio, S_1 quello rimanente (ove il moto dovrà ritenersi *vorticoso* e che trovasi nell'intorno della luce) ω_0 la frazione di parete a contatto con S_0, ω_1 quella che in parte limita lo spazio S_1 (Vedi Fig. 1).

Se allora nell'applicare la (7) si tengono presenti i dati acquisiti dall'esperienza [1], dovrà farsi $v=0$ su tutto ω_0, dal che segue la conoscenza del segno del termine

$$\int_{\omega_1} v^2 n d\omega \times h ,$$

essendo ω_1 una piccola parte, di nota giacitura, della parete ω.

Lo stesso non può dirsi invece dell'integrale di spazio, anche quando ci si limiti a considerare il suo valore entro S_0, ove il moto è regolare.

Le sole affermazioni lecite sembrano le seguenti:

1°) Se il serbatoio è un cilindro a sezione retta circolare, e luce è praticata sul fondo,

$$\int_{S_0} v \wedge \operatorname{rot} v dS_0 = 0,$$

2°) se è un cono convergente nel senso del moto, lo stesso integrale è un vettore diretto come k, ma di senso contrario,

3°) se è un cono divergente, il vettore ha la direzione e il senso di k.

Perciò, ove si adotti uno dei tipi citati di serbatoio:

a) se $k \times h = 0$, nessuna influenza ha la forma del serbatoio, sul valore del coefficiente μ (si rammenti che $v=0$ su sutto ω_0).

b) se $k \times h = 1$, è conveniente, allo scopo di impiccolire μ, l'adozione di un serbatoio divergente,

c) se $k \times h = -1$, conviene un serbatoio convergente.

Venendo ora a considerare gli integrali estesi ai campi ω_1, S_1, ove il moto è vorticoso, due ordini di difficoltà si incontrano: la non conoscenza delle traiettorie vere alle quali si riferisce l'equazione del moto di cui ci siamo valsi, e la varietà del moto dovuta all'agitazione vorticosa.

Dalla prima segue che nulla può dirsi del segno degli integrali in questione; dalla seconda che, a rigore, non è accettabile neppure la relazione (5), fondata sulla permanenza del moto in tutto S.

A tali difficoltà può darsi una veste di qualche evidenza.

(1) U. Puppini. *Sui fondamenti scientifici dell' Idraulica.* Cap. III.

Si supponga rigorosamente permanente il moto entro il solo spazio S_0. La (5) diviene:

$$(5') \qquad \rho\int_S F dS - \int_S \operatorname{grad} \beta dS = \rho\Omega_1 V_1^2 h - \gamma_0\rho\Omega_0 V_0^2 k + \rho\int_{S_1} \frac{\partial v}{\partial t} dS_1 .$$

Ma, notando che

$$a = \frac{dv}{dP} v \qquad \text{in } S_0,$$

$$a = \frac{dv}{dP} v + \frac{\partial v}{\partial t} \qquad \text{in } S_1,$$

si ha ancora

$$-\frac{1}{2}\int_\sigma v^2 n d\sigma - \int_S v \wedge \operatorname{rot} v dS = \Omega_1 V_1^2 h - \gamma_0 \Omega_0 V_0^2 k .$$

Si applichi ora ai termini di questa relazione l'operatore $\frac{1}{\tau}\int_t^{t+\tau} dt$ che fu già usato dal BOUSSINESQ [1] nei suoi studi sulle correnti reali.

Definendo velocità media la quantità

$$v_1 = \frac{1}{\tau}\int_t^{t+\tau} v dt = v - \beta,$$

dove β è l'*agitazione vorticosa*, variabile da istante a istante, e se si suppone mediamente permanente la natura del moto, cioè v_1 indipendente dal tempo in tutto S, si ha:

$$-\frac{1}{2}\int_\sigma (v_1^2 + \beta^2) n d\sigma - \int_S v_1 \wedge \operatorname{rot} v_1 dS - \int_{S_1} w dS_1 = \Omega_1 V_1^2 h - \gamma_0 \Omega_0 V_0^2 k .$$

(poichè in Ω_1 il moto è rigorosamente permanente), dove

$$w = \frac{1}{\tau}\int_t^{t+\tau} \beta \wedge \operatorname{rot} \beta dt .$$

Ma $\beta = 0$ su Ω_0, su Ω_1 e sopra λ (ciò discende sperimentalmente dalla limpidezza della vena, quando il bordo della luce sia regolare).

(1) τ è il tempo al disotto del quale il risultato dell'operazione (media nel tempo τ) comincerebbe a presentare notevoli scarti.

Perciò, adottando il solito procedimento, si ricava:

$$(8)\quad \mu = \frac{1 - \frac{1}{\Omega V_1^2}\left\{ \int\limits_{\omega} (v_1^2 + \beta^2) n d\omega + 2\int\limits_{S} v_1 \wedge \operatorname{rot} v_1 + 2\int\limits_{S_1} w dS_1 \right\} \times h}{2 - (2\eta - 1)\frac{\Omega_1}{\Omega_0} k \times h},$$

espressione che pone in maggiore evidenza, senza risolverle, essendo β una funzione totalmente incognita, le difficoltà sopra accennate.

3. Un risultato pratico si ottiene invece mediante il seguente artifizio.

Si considerino due serbatoi, con relative luci, di egual forma e dimensione. Scorra in uno di essi un liquido reale di densità ρ e di coefficiente di viscosità ε, nell'altro un liquido perfetto di egual densità in moto irrotazionale. Agisca sui due la stessa forza di massa F, e sia la stessa la velocità V_0 (media per l'uno, ed eguale dovunque per l'altro) degli elementi che attraversano la sezione Ω_0 (Fig. 1).

Il principio delle quantità di moto, applicato alla massa liquida del primo serbatoio, fornisce la relazione (5'). Se ora la equazione del moto si scrive nella forma datale dal NAVIER:

$$\operatorname{grad} \beta = \operatorname{grad} p - \varepsilon \Delta' v,$$

dove p è un'omotetia che rappresenta la parte *statica* della pressione, risulta:

$$\int\limits_{S} F dS - \frac{1}{\rho}\int\limits_{S} \operatorname{grad} p dS - \frac{\varepsilon}{\rho}\int\limits_{\sigma} \frac{dv}{dP} n d\sigma = \Omega_1 V_1^2 h - \eta\Omega_0 V_0^2 k + \int\limits_{S_1} \frac{\partial v}{\partial t} dS_1 .$$

Indicando poi con v_i, a_i le velocità e le accelerazioni del liquido perfetto che scorre nel secondo serbatoio, si ha:

$$\operatorname{grad} p = \rho(F - a_i),$$

equazione del moto, e ancora:

$$a_i = \frac{1}{2}\operatorname{grad} v_i^2,$$

per essere questo irrotazionale. Tenendo conto di tali espressioni, si ha:

$$-\frac{1}{2}\int_\sigma v_i^2 n d\sigma - \frac{\varepsilon}{\rho}\int_\sigma \frac{dv}{dP} n d\sigma = \Omega_1 V_1^2 h - \eta\Omega_0 V_0^2 k + \int_{S_1} \frac{\partial v}{\partial t} dS_1,$$

dove σ risulta dal complesso delle superficie Ω_0, Ω_1, λ e ω.

Si osservi ora che $\frac{dv}{dP} n$ è nullo sopra Ω_0 e Ω_1 e che si è supposto $V_0 = V_{0i}$, mentre può scriversi:

$$V_1^2 = \alpha V_{1i}^2,$$

(per l'acqua è $\alpha = \overline{0{,}97}^2 \backsim 0{,}94$), per cui si avrà:

$$-\frac{1}{2}\int_\sigma v_i^2 n d\sigma - \frac{\varepsilon}{\rho}\int_{\omega+\lambda} \frac{dv}{dP} n d\omega = \alpha\Omega_1 V_{1i}^2 h - \eta_i\Omega_0 V_0^2 k + \int_{S_1} \frac{\partial v}{\partial t} dS_1.$$

Notando poi che la limpidezza della vena accusa la mancanza di agitazione vorticosa sopra la superficie laterale λ [1], così come accade sopra ω_0, per cui potrà ivi ritenersi $\frac{dv}{dP} n = \frac{dv}{dn} t$ (dove t è un vettore unitario diretto come la velocità nel punto considerato, tangente quindi alla superficie ω_0 o λ), e applicando ai termini dell'ultima relazione il solito operatore $\frac{1}{\tau}\int_t^{t+\tau} dt$, si ha ancora:

$$-\frac{1}{2}\int_\sigma v_i^2 n d\sigma - \frac{\varepsilon}{\rho}\int_{\omega_0+\lambda} \frac{dv}{dn} t d\omega - \frac{\varepsilon}{\rho}\int_{\omega_1} \frac{dv_1}{dP} n d\omega_1 = \alpha\Omega_1 V_{1i}^2 h - \eta_i\Omega_0 V_0^2 k.$$

dove v_1 indica la velocità media. Eseguendo poi le note trasformazioni si ha infine:

$$(9) \qquad \mu = \frac{1 - \Omega V_{1i}^2 \left\{ \int_\omega v_i^2 n d\omega + \frac{2\varepsilon}{\rho}\left[\int_{\omega_0+\lambda} \frac{dv}{dn} t d\omega + \int_{\omega_1} \frac{dv_1}{dP} n d\omega_1 \right] \right\} \times h}{2\alpha - (2\eta - 1)\frac{\Omega_1}{\Omega_0} k \times h}.$$

[1] Così lo spazio ove il moto è vorticoso non è tutto S_1, ma una sua parte, disposta (come a un di presso si è indicato nella Fig. 2) entro la superficie di traccia s.

In questa espressione figurano due velocità: la velocità v del liquido reale, e quella v_i del liquido perfetto. Essa dà il coefficiente di contrazione di un qualsiasi liquido reale.

Importa rilevare che, potendo ε assumere valori sensibili (210 per la glicerina, a 10° centigradi, nel sistema metro, chilogrammo, secondo), non potrà a priori trascurarsi alcuno dei termini che l'accompagnano nel numeratore della (9), e che la formula (9) stessa rende ragione della debole contrazione che si verifica nei liquidi assai viscosi, come l'olio e la glicerina, per i quali infatti il valore di α scende molto al di sotto dell'unità.

Naturalmente, ove si faccia $\varepsilon = 0$, $\alpha = \gamma_i = 1$, la (9) coincide con la (1).

Quando si esperimenti con acqua, per la quale $\varepsilon = 0.000133$, un calcolo, che qui omettiamo, permette di affermare la trascurabilità del termine

$$\frac{2\varepsilon}{\rho} \int\limits_{\omega_0 + \lambda} \frac{dv}{dn} t d\omega ,$$

per cui, in tal caso, avendosi inoltre $\alpha = 0{,}94$ ed $2\gamma_i = 1{,}0222$, risulta:

$$\mu = \frac{1 - \frac{1}{\Omega V_{1i}^2} \left\{ \int\limits_{\omega} v_i^2 n d\omega + \frac{2\varepsilon}{\rho} \int\limits_{\omega_1} \frac{dv_1}{dP} n d\omega_1 \right\} \times h}{1{,}88 - 1{,}0444 \frac{\Omega_1}{\Omega_0} k \times h} . \tag{10}$$

La nessuna conoscenza della funzione $\frac{dv_1}{dP} n$, di cui si è implicitamente ammessa l'esistenza nella ragione ω_1 ove il moto è vorticoso, renderebbe incerta anche qui qualsiasi deduzione.

Se non chè pare attendibile l'ipotesi che sia anche sopra ω_1:

$$\frac{dv_1}{dP} n = \frac{dv_1}{dn} t .$$

Pertanto si ottiene infine:

$$\mu = \frac{1 - \frac{1}{\Omega V_{1i}^2} \left\{ \int\limits_{\omega} v_i^2 n d\omega + \frac{2\varepsilon}{\rho} \int\limits_{\omega_1} \frac{dv_i}{dn} t d\omega_1 \right\} \times h}{1{,}88 - 1{,}0444 \frac{\Omega_1}{\Omega_0} k \times h} \tag{11}$$

Questa espressione, benchè non sia nota l'estensione del campo ω_1, nè si conosca la funzione $\frac{dv_i}{dn}$, è tuttavia atta a giustificare i risultati sperimentali ottenuti dal MASONI.

Infatti, confrontando le (1), (11), risulta non solo diminuito per doppia ragione il denominatore, ma ancora aumentato il numeratore, in grazia del contributo certamente positivo [per essere (vedi Fig. 2) $t \times h < 0$ e $\frac{dv_1}{dn} > 0$], apportato dal termine

$$-\frac{2\varepsilon}{\rho}\int_{\omega_1}\frac{dv_1}{dn}\, t d\omega_1 \times h .$$

Del pari trova giustificazione il valore 0,55 riscontrato dal BORDA nei tubi addizionali cilindrici interni.

Infine la stessa formula (11) rende lecito qualche dubbio circa il risultato sperimentale dei dispositivi indicati nelle Fig. 3, 4, la probabilità di conseguire in tali casi con acqua un valore di μ inferiore ad $\frac{1}{2}$ presentandosi affidata solamente al massimo possibile ingrandimento del rapporto $\frac{\Omega_1}{\Omega_0}$.

Bologna, Scuola Ingegneri, Novembre 1924.