Bollettino
Unione Matematica
Italiana

Francesco Sbrana

Sopra certe equazioni differenziali del secondo ordine

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **3** (1924), n.5, p. 200–206.

Unione Matematica Italiana

¡http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1924_1_3_5_200_0¿

Sopra certe equazioni differenziali del secondo ordine.

Nota di FRANCESCO SBRANA

1. È noto che se nell'equazione differenziale

$$A_n y^{(n)} + A_{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + A_0 y = 0, \tag{1}$$

i coefficienti sono polinomi in x, del grado indicato dal proprio indice, e si considera la x come variabile complessa, si riesce a stabilire diverse proprietà notevoli del suo integrale generale, ricorrendo alla trasformazione definita dall'uguaglianza

$$z(x) = \int_{(l)} \frac{y(t)}{(x - t)^\sigma} dt, \tag{2}$$

in cui l è una curva conveniente del piano complesso, e σ una costante [1]; in particolare, per l'equazione ipergeometrica, che è una speciale equazione del secondo ordine del tipo (1), la trasformazione (2) permette di determinare l'integrale generale, sotto forma di integrale definito [2].

Non sembra sia stato osservato che se nella (1) si riguarda invece la x come variabile reale, si perviene a risultati analoghi, sostituendo alla (2) la funzione

$$z(x) = \int_0^x y(t)(x-t)^\alpha dt, \tag{3}$$

dove α sia una costante, reale o complessa, con $R(\alpha) > -1$ [3].

In questa Nota vogliamo limitarci a mostrare che con la trasformazione (3) si perviene ad integrare per quadrature (nel campo reale) l'equazione

$$(ax^2 + bx + c)y'' + (dx + e)y' + fy = 0, \tag{4}$$

con $a, b, \ldots, f$ costanti reali; e che cogli stessi mezzi si risolve l'equazione di LAPLACE del secondo ordine

$$(a_0x + b_0)y'' + (a_1x + b_1)y' + (a_2x + b_2)y = 0, \tag{5}$$

dove le a_i, b_i siano costanti reali [4].

2. *Trasformazione funzionale.* — Anzitutto, cambiando nella (3) t in $x-t$, si ottiene

$$z(x) = \int_0^x y(x-t)t^\alpha dt,$$

(1) Cfr. PINCHERLE, *Delle funzioni ipergeometriche e di varie questioni ad esse attinenti*, Cap. VI; « Giorn. di Matem. di Battaglini », 1894.

(2) Cfr. PINCHERLE, l. cit., ed anche: *Gli elementi della teoria delle funzioni analitiche*, parte prima, cap. decimosettimo.

(3) Al limite inferiore dell'integrale al secondo membro della (3) si è posto, per comodità, lo zero; ma le proprietà della trasformazione restano invariate, sostituendovi una qualunque altra costante reale.

(4) Relativamente alla (5), ved. SCHLÖMILCH, *Compendium der höheren Analysis*, 1879, II Bd., ultimo capitolo; GOURSAT, *Cours d'Analyse Math.*, T. II, 1905, p. 440 e segg. Speciale interesse presenta l'equazione che si ottiene dalla (5) supponendo nulli tutti i coefficienti, eccetto b_0 e a_2; essa s'incontra nell'integrazione di una nota equazione alle derivate parziali del second'ordine. Cfr. TRICOMI, « Memorie della R. Accademia dei Lincei », 1923.

e quindi, derivando successivamente,

$$z'(x) = \int_0^x y'(x-t)t^\alpha dt + y_0 x^\alpha,$$

$$z''(x) = \int_0^x y''(x-t)t^\alpha dt + \alpha y_0 x^{\alpha-1} + y'_0 x^\alpha,$$

con

$$y_0 = y(0), \quad y'_0 = y'(0) \text{ [1]};$$

ovvero

(6) $$\int_0^x y'(t)(x-t)^\alpha dt = z'(x) - y_0 x^\alpha,$$

(7) $$\int_0^x y''(t)(x-t)^\alpha dt = z''(x) - \alpha y_0 x^{\alpha-1} - y'_0 x^\alpha.$$

Si ha poi

$$\int_0^x t y'(t)(x-t)^\alpha dt = \int_0^x [x-(x-t)] y'(t)(x-t)^\alpha dt$$

$$= x[z'(x) - y_0 x^\alpha] - \int_0^x y'(t)(x-t)^{\alpha+1} dt;$$

e con una integrazione per parti

(8) $$\int_0^x y'(t)(x-t)^{\alpha+1} dt = -y_0 x^{\alpha+1} + (\alpha+1) z(x);$$

per conseguenza

(9) $$\int_0^x t y'(t)(x-t)^\alpha dt = x z'(x) - (\alpha+1) z(x).$$

In modo simile si trova

(10) $$\int_0^x t y''(t)(x-t)^\alpha dt = x z''(x) - (\alpha+1) z'(x) + y_0 x^\alpha.$$

[1] Si può sempre ritenere che la (4), o la (5), sia data in forma tale, che si possano assegnare ad arbitrio valori finiti per $y(0)$ e $y'(0)$; perchè questa condizione sia soddisfatta, basterà, eventualmente, eseguire un opportuno cambiamento di variabile.

Notiamo ancora che

$$\int_0^x t^2 y''(t)(x-t)^{\alpha}dt = \int_0^x y''(t)(x-t)^{\alpha+2}dt +$$
$$+ 2x\int_0^x t y''(t)(x-t)^{\alpha}dt - x^2\int_0^x y''(t)(x-t)^{\alpha}dt;$$

con una integrazione per parti, e coll'aiuto della (8), otteniamo

$$\int_0^x y''(t)(x-t)^{\alpha+2}dt = -y'_0 x^{\alpha+2} + (\alpha+2)[(\alpha+1)z(x) - y_0 x^{\alpha+1}],$$

e infine, valendoci anche delle (7), (10),

$$\int_0^x t^2 y''(t)(x-t)^{\alpha}dt = x^2 z''(x) - 2(\alpha+1)xz'(x) + (\alpha+1)(\alpha+2)z(x). \tag{11}$$

3. *Integrazione della* (4). — Per quanto precede, cambiando nella (4) x in t, moltiplicando per $(x-t)^{\alpha}dt$, ed integrando poi, tra i limiti zero ed x, otteniamo l'equazione differenziale per z

$$\begin{aligned}(ax^2+bx+c)z''(x) &+ [\{d-2a(\alpha+1)\}x + e - b(\alpha+1)]z'(x) + \\ &+ [a(\alpha+1)(\alpha+2) - d(\alpha+1) + f]z(x) = \Phi(x),\end{aligned} \tag{12}$$

con

$$\Phi(x) = [(e-b)x + c\alpha]x^{\alpha-1}y_0 + cx^{\alpha}y'_0.$$

Posto ora $\xi = \alpha + 1$, se si può scegliere α in modo che sia

$$a\xi^2 + (a-d)\xi + f = 0, \tag{13}$$

la (12) diviene del primo ordine per $z'(x)$, e si risolve immediatamente. Determinata poi la z, si otterrà la y come soluzione dell'equazione integrale (3) (1).

Ma perchè questo sia possibile, occorre che la (13) ammetta una radice con parte reale positiva. Nel caso contrario, posto

(1) Ved. Volterra, *Leçons sur les equations intégrales*, etc. (Paris 1913), pp. 34-39. È superfluo avvertire che, se la parte reale di α risulta positiva, basterà derivare la (3) un numero conveniente di volte, per ridurre la (3) stessa all'equazione di Abel.

$z_p \doteq z^{(p)}$, ed inoltre

$$d_1 = d - 2a(\alpha + 1), \quad e_1 = e - b(\alpha + 1), \quad f_1 = a(\alpha + 1)(\alpha + 2) - d(\alpha + 1) + f,$$

dall' equazione

$$(ax^2 + bx + c)z'' + (d_1 x + e_1)z_1 + f_1 z = \Phi, \tag{12}$$

con p derivazioni segue

$$\begin{aligned}(ax^2 + bx + c)z''_p + [(d_1 + 2pa)x + e_1 + pb]z'_p + \\ + [f_1 + pd_1 + p(p-1)a]z_p = \Phi^{(p)}(x),\end{aligned} \tag{14}$$

come agevolmente si dimostra per induzione; e per quest' ultima equazione la (13) è sostituita dall' altra

$$a\xi^2 + [a - d - 2pa]\xi + p[(p-1)a + d] + f = 0,$$

le cui radici sono quelle della (13) aumentate di p. Basta dunque scegliere p opportunamente, perchè la limitazione richiesta per α risulti verificata. Si potrà così ottenere z'_p, e con $p+1$ successive integrazioni la funzione z.

Per $a = d = 0$, la (12) diviene

$$(bx + c)z'' + e_1 z' + fz = \Phi, \tag{15}$$

con $e_1 = e - b(\alpha + 1)$, e il procedimento precedente non è più valido, non potendo più sussistere, per $f \neq 0$, la condizione (13). Notiamo allora che cambiando, ove occorra, il segno dei coefficienti b, c, e, f, e della funzione Φ, possiamo ritenere che il binomio $bx + c$ risulti positivo, quando la x mantenga un segno opportuno. Posto quindi

$$t = \frac{2}{b}\sqrt{bx + c}, \tag{16}$$

la (15) diviene

$$\frac{d^2 z}{dt^2} + \frac{1}{t}\left[\frac{2}{b}e_1 - 1\right]\frac{dz}{dt} + fz(t) = \Psi(t),$$

con

$$\Psi(t) = \Phi\left(\frac{b^2 t^2 - 4c}{4b}\right).$$

Ora, se si può assumere

$$\alpha = \frac{e}{b} - \frac{3}{2},$$

si ha l'equazione

$$\frac{d^2z}{dt^2} + fz = \Psi(t),$$

che è subito integrata. Si richiede, per questo, che il rapporto $\frac{e}{b}$ sia maggiore di $\frac{1}{2}$. Se ciò non fosse, derivando p volte la (15) troviamo l'equazione

$$(bx + c)z''_p + (e_1 + pb)z'_p + fz_p = \Phi^{(p)}(x),$$

che, col cambiamento di variabile definito dalla (16), diviene

$$\frac{d^2z_p}{dt^2} + \frac{1}{t}\left[\frac{2}{b}(e_1 + pb) - 1\right]\frac{dz_p}{dt} + fz_p = \Psi_p(t), \tag{17}$$

essendo

$$\Psi_p(t) = \Phi^{(p)}\left(\frac{b^2t^2 - 4c}{4b}\right).$$

Perchè la (17) manchi del secondo termine al primo membro, deve risultare

$$\alpha = \frac{e}{b} - \frac{3}{2} + p;$$

si potrà dunque scegliere p in modo che sia $\alpha > -1$.

4. *Integrazione dell' equazione* $(a_0x + b_0)y'' + (a_1x + b_1)y' + (a_2x + b_2)y = 0$. — Se a_0 ed a_1 non sono simultaneamente nulli, posto

$$\varphi = e^{-kx}y,$$

dove k sia radice dell'equazione

$$a_0k^2 + a_1k + a_2 = 0,$$

si ottiene

$$(bx + c)\varphi'' + (dx + e)\varphi' + f\varphi = 0, \tag{18}$$

con $b, c, \dots, f$ costanti opportune.

Se $a_0 = a_1 = 0$, (e $a_2 \neq 0$), posto $\varphi = e^{-\frac{b_1}{2b_0}x}y$, troviamo

$$b_0\varphi'' + \left(a_2x + b_2 - \frac{b_1^2}{4b_0}\right)\varphi = 0;$$

ed ancora, assumendo come nuova variabile

$$t = \left(a_2 x + b_2 - \frac{b_1^2}{4b_0}\right)^3 \frac{1}{9b_0 a_2^2},$$

(19)
$$t\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{2}{3}\frac{d\varphi}{dt} + \varphi(t) = 0.$$

Appare quindi manifesto quanto abbiamo in principio affermato, essendo applicabili alle (18), (19) le osservazioni precedenti [1].

Genova, 6 settembre 1924.

[1] Vogliamo ancora osservare come queste conducano pure all'integrazione per quadrature dell'equazione differenziale

$$y'' + cx^n y = 0,$$

con c ed n costanti ($x > 0$). Posto, infatti, $t = \frac{x^{n+2}}{n+2}$, si ottiene l'equazione, analoga alla (19),

$$(n+2)t\frac{d^2y}{dt^2} + (n+1)\frac{dy}{dt} + cy = 0.$$