
BOLLETTINO UNIONE MATEMATICA ITALIANA

OSCAR CHISINI

Intorno alla dimostrazione di un teorema di Noether

*Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie
1, Vol. 3 (1924), n.5, p. 197–200.*

Unione Matematica Italiana

[http:
//www.bdim.eu/item?id=BUMI_1924_1_3_5_197_0](http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1924_1_3_5_197_0)

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione
Matematica Italiana, 1924.

Intorno alla dimostrazione di un teorema di Noether.

Nota di OSCAR CHISINI

Nell'ultimo fascicolo di questo *Bollettino* (15 ottobre 1924, pag. 162) C. ROSATI pubblica una sua Nota « Sopra un teorema di NOETHER ». Ora, essendo attratta l'attenzione dei nostri geometri su tale argomento, credo non inutile presentare anche una dimostrazione, semplicissima, che da parte mia avevo avuto occasione di svolgere, tanto più che il teorema in causa, e così la dimostrazione relativa, non figura nelle « Lezioni sulla Teoria geometrica delle equazioni » di ENRIQUES-CHISINI.

Eccola.

Cominciamo ad osservare una cosa ovvia e notissima.

Sopra una curva f , di genere $p > 1$, sia

$$|G_m| = g_m^{r_m}$$

la serie completa definita da un gruppo G_m di m punti della curva, e si consideri la differenza

$$i_m = r_m - (m - p),$$

cioè il cosiddetto indice di specialità.

Un punto P del G_m potrà essere fisso o no per la $|G_m|$: nel primo caso la serie residua

$$|G_m - P| = g_{m-1}^{r_{m-1}}$$

avrà la dimensione

$$r_{m-1} = r_m$$

e l'indice di specialità

$$i_{m-1} = i_m + 1,$$

mentre, nel caso opposto, sarà

$$r_{m-1} = r_m - 1, \quad i_{m-1} = i_m.$$

Ciò posto sia dato, sulla f , un G_n non speciale, cioè d'indice di specialità $i_n = 0$, e si tolgano da esso uno alla volta $n - 1$ dei suoi punti, che indicheremo pertanto successivamente con $P_n, P_{n-1}, \dots, P_m, \dots, P_2$, fino a che ci si riduca ad un unico ultimo punto, P_1 . Corrispondentemente all'ordinamento dei punti $P_1 P_2 \dots P_n$ potremo considerare la successione dei gruppi

$$G_m = (P_1 + P_2 + \dots + P_m) \quad (m = 1, 2, \dots, n)$$

e delle relative serie complete

$$g_m^{r_m} = |G_m|$$

di cui l'ultima, $|G_1|$, costituita dal punto fisso P_1 , è una g_1^0 di indice di specialità

$$i_1 = 0 - (1 - p) = p - 1.$$

Ora noi, partendo da una serie, la $|G_n|$, d'indice di specialità 0, siamo arrivati ad un'altra, la $|G_1|$, d'indice di specialità $p - 1$; onde nel passare da una $|G_m|$ alla $|G_{m-1}|$ successiva ci deve essere occorso $p - 1$ volte di aumentare di 1 l'indice di specialità, cioè per $p - 1$ valori di m ($2 \leq m \leq n$) il punto P_m deve esser stato punto fisso della corrispondente $|G_m|$. Tenendo poi conto che la $|G_1|$ è costituita dal punto fisso P_1 , si deduce anzitutto l'esistenza di *almeno* p serie $|G_m|$ ($1 \leq m \leq n$) dotate di qualche punto fisso, vale a dire la prima parte del teorema di

NOETHER in questione, nella forma in cui lo enuncia il ROSATI nella citata Nota:

Dato sopra una curva f del genere $p > 1$ un gruppo non speciale G_n di n punti disposti in un ordine qualsiasi, e indicato con G_m il gruppo costituito dal 1°, 2°, ... m^{mo} punto, il numero delle serie complete $|G_m|$ ($m = 1, 2 \dots n$) dotate di punti fissi è $\geq p$.

Ma si deduce, insieme, anche la seconda parte dell'enunciato, cioè che

Esistono ordinamenti del gruppo per cui le dette serie sono in numero di p .

Infatti, qualora una $|G_m|$ abbia dei punti fissi, per passare alla $|G_{m-1}|$ successiva si tolga uno di questi punti fissi, assumendolo dunque come punto P_m . Con questa avvertenza si avrà che tante sono le serie, oltre la G_1 , dotate di qualche punto fisso, quanti i punti P_m fissi per la relativa G_m che abbiamo tolti; cioè in tutto esattamente p serie dotate di qualche punto fisso.

È poi chiaro che la detta avvertenza, oltre che sufficiente, è necessaria se si vuole avere solo p serie siffatte; onde segue il modo di costruire tutti gli ordinamenti richiesti.

Contemporaneamente si deduce pure una ovvia e nota generalizzazione, non per sè molto significativa, ma che chiarisce la natura del teorema di NOETHER: « qualunque sia la g_n^r , anche speciale, definita dal G_n , delle serie $|G_m|$ con punti fissi se ne trovano almeno $r - n$, ed esattamente tante per un ordinamento conveniente dei punti del G_n ».

Come si vede, esulano da questa dimostrazione le curve aggiunte, la serie canonica, il teorema di riduzione o quello — ad esso collegato — di RIEMANN ROCH, che per NOETHER ed altri sono invece essenziali, e così pure non vi è affatto necessità di considerare quella dipendenza in senso stretto cui ha dovuto ricorrere il ROSATI per render rigorosa la dimostrazione di NOETHER: bastano i concetti elementari d'ordine e di dimensione di una serie g_n^r , di serie completa e serie differenza, più il nome di indice di specialità dato alla differenza $r - (n - p)$. Che sia poi $r - (n - p) = 0$ quando il G_n definente la g_n^r non appartiene a un gruppo canonico (o a una curva aggiunta che lo seghi sulla f) questa è circostanza qui estranea, e che del resto in qualunque trattazione della « Geometria sopra la curva » viene dimostrata indipendentemente dal teorema in causa.

Vale in fine la pena di notare come la maggior semplicità qui raggiunta tenga a quella visione invariante della « Geometria sopra la curva » introdotta dall'ENRIQUES, la quale ap-

punto ispira lo svolgimento principale di questa teoria che — accanto agli altri, classici e recentissimi — trovasi nel terzo volume delle innanzi accennate « Lezioni ».

Bologna, ottobre 1924.

Osservazione di C. ROSATI. — La elegante osservazione con cui CHISINI prova che un gruppo ordinato G_n che individui una g_n^r completa dà luogo ad almeno $n - r$ serie dotate di punti fissi ed esattamente ad $n - r$ per convenienti ordinamenti, porta un innegabile contributo di semplicità alla dimostrazione del teorema di NOETHER, da me riprodotta tenendo conto di un'avvertenza che la rende in tutto rigorosa. Con la detta osservazione si giunge infatti alla proposizione di NOETHER solo invocando la proprietà (che è parte del teorema di RIEMANN-RÖCH) per cui una g_n non speciale completa ha la dimensione $r = n - p$, laddove nella dimostrazione di NOETHER si ricorre al teorema di riduzione nelle due forme diretta e inversa, e quindi in definitiva all'intero teorema di RIEMANN-ROCH.

È giusto però riconoscere d'altro canto che la dimostrazione di NOETHER presenta il vantaggio di dare la *effettiva* costruzione degli ordinamenti del gruppo non speciale G_n che danno luogo solo a p serie con punti fissi, in quanto offre un criterio per stabilire quali sono i punti che risultano fissi per le successive serie. E il vantaggio si rende più manifesto quando, supposto G_n costituito da n punti coincidenti, si dà al teorema la forma più significativa del « Lückensatz » di WEIERSTRASS; i numeri lacunari di un punto *qualsiasi* vengono allora ad assumere un significato in relazione alla serie canonica.

C. ROSATI

Pisa, 12 novembre 1924.