
BOLLETTINO UNIONE MATEMATICA ITALIANA

MAURO PICONE

Sui metodi di sommazione delle serie

*Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie
1, Vol. 3 (1924), n.5, p. 193–197.*

Unione Matematica Italiana

[http:
//www.bdim.eu/item?id=BUMI_1924_1_3_5_193_0](http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1924_1_3_5_193_0)

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione
Matematica Italiana, 1924.

PICCOLE NOTE

Sui metodi di sommazione delle serie.

Nota di MAURO PICONE

Un certo procedimento infinito di calcolo applicato ad un certo ente E consista nella ricerca del limite di una certa variabile ordinata z ; denotando con

$$\lim' z \text{ e } \lim'' z$$

il minimo ed il massimo limite della z , chiamo *intervallo di indeterminazione* relativo al detto procedimento, applicato a E , l'intervallo $(\lim' z, \lim'' z)$ e di due procedimenti infiniti di calcolo Π_1 e Π_2 , dico il primo *meno indeterminato* del secondo se:

1°) qualunque sia l'ente E a cui si applicano, l'intervallo di indeterminazione relativo a Π_1 è sempre contenuto in quello relativo a Π_2 ;

2°) esistono esempi di particolari enti per i quali gli intervalli di indeterminazione relativi ai due procedimenti non coincidono.

Si può ben dire che *perfezionare* un procedimento infinito di calcolo equivale a renderlo meno indeterminato, e anche da questo punto di vista LEBESGUE ha perfezionato il procedimento di integrazione delle funzioni, perchè — com'è dimostrato, forse per la prima volta, al n.° 90 delle mie *Lezioni d'Analisi infinitesimale* [Circolo matematico di Catania, Catania (R. Università), 1923] — gli integrali riemanniani, per difetto e per eccesso, di una qualsiasi funzione limitata, sono rispettivamente il minimo ed il massimo limite di una certa variabile ordinata.

I vari procedimenti di sommazione delle serie successivamente proposti ed applicati da POISSON, CESÀRO, HÖLDER, BOREL, RIESZ, ... (per parlare di quelli divenuti classici) possono tutti considerarsi casi speciali del seguente. Sia data la serie

(1).
$$u_0 + u_1 + \dots + u_n + \dots;$$

sull'insieme A , supposto illimitato, di uno spazio lineare ad un qualsiasi numero di dimensioni, si definiscano le funzioni del punto P , in infinità numerata,

$$(2) \quad f_0(P), f_1(P), \dots, f_n(P), \dots,$$

reali, limitate, mai negative, verificanti le condizioni: è sempre in A

$$f_0(P) \geq f_1(P) \geq \dots \geq f_n(P) \geq \dots,$$

laddove, ogni funzione $f_k(P)$ ($k=0, 1, 2, \dots$) è convergente su A , per P tendente all'infinito, e riesce

$$\lim_{P \rightarrow \infty} f_k(P) (\text{su } A) = 1 \quad (k=0, 1, 2, \dots).$$

Quello che chiamo il *procedimento di sommazione della serie* (1), sull'insieme A e relativo alla successione (2), consiste nell'attribuire alla serie (1), come minima e massima somma, rispettivamente i seguenti limiti

$$u' = \lim_{P \rightarrow \infty}' \left[\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=0}^n u_k f_k(P) \right) \right] (\text{su } A),$$

$$u'' = \lim_{P \rightarrow \infty}'' \left[\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=0}^n u_k f_k(P) \right) \right] (\text{su } A).$$

L'intervallo (u', u'') è l'intervallo di indeterminazione relativo al descritto generale procedimento di sommazione.

Alla domanda (fino ad ora mai formulata) se i sopracitati classici metodi di sommazione possono considerarsi, dal *sopradetto punto di vista*, come altrettanti perfezionamenti del metodo di sommazione ordinario, si risponde affermativamente, in base al teorema seguente:

L'intervallo di indeterminazione del procedimento di sommazione della serie (1), su un qualsiasi insieme A e relativo ad una qualsiasi successione (2), è sempre contenuto nell'intervallo di indeterminazione del procedimento di sommazione ordinario.

La dimostrazione di questo teorema sarà esposta in un lavoro, recante lo stesso titolo della nota presente, in corso di pubblicazione negli *Annali di matematica pura ed applicata*. Scopo della presente nota è di enunciare taluni dei risultati più salienti ottenuti in quel lavoro.

Se riesce $u' = u''$, dico la serie (1) *sommabile*, su A e relativamente alla (2), e *convergente o divergente* secondochè il valore comune di u e di u' è finito o infinito. Anche nel caso della convergenza, su A e relativamente alla (2), contrariamente a quanto

era stato fatto fin qui, non richiedo dunque per nulla la preliminare convergenza ordinaria della serie

$$u_0 f_0(P) + u_1 f_1(P) + \dots + u_n f_n(P) + \dots$$

Pertanto, in particolare, il metodo esponenziale di sommazione di BOREL è così liberato dalla condizione fortemente restrittiva, secondo la quale la serie di potenze in α

$$u_0 + u_1 \frac{\alpha}{1!} + u_2 \frac{\alpha^2}{2!} + \dots + u_n \frac{\alpha^n}{n!} + \dots,$$

doveva avere infinito il raggio di convergenza. Nello studio di questo metodo di sommazione e delle sue estensioni incontro, per esempio, i seguenti nuovi teoremi di calcolo integrale:

Se la funzione $f(x)$ della variabile reale x , definitiva per $x \geq a$, è continua, sussistono le relazioni

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \left[f(x) + \int_a^x f(z) dz \right] &\leq \lim_{x \rightarrow \infty} \int_a^x f(z) dz \leq \\ &\leq \lim_{x \rightarrow \infty} \int_a^x f(z) dz \leq \lim_{x \rightarrow \infty} \left[f(x) + \int_a^x f(z) dz \right]. \end{aligned}$$

Pertanto, se, per x divergente, la funzione

$$(3) \quad f(x) + \int_a^x f(z) dz$$

è regolare, si ha che, per x divergente, la funzione

$$\int_a^x f(x) dz$$

è pur essa regolare ed ha lo stesso limite (finito o infinito) della (3). Risulta perciò $f(x)$ infinitesima, per $x \rightarrow \infty$, quando la (3) è convergente, per $x \rightarrow \infty$.

Se ne deduce, in particolare:

Se la funzione $f(x)$, definita per $x \geq a$, è continua, condizione necessaria per la convergenza dell'integrale improprio

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx$$

è che risulti

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left| e^{-x} \int_a^x f(z) e^z dz \right| = 0.$$

Stabilisco che la proprietà distributiva sussiste per il più generale procedimento di sommazione delle serie.

Nell'ipotesi che i termini della serie (1) siano funzioni di un punto Q , simultaneamente definite in un certo insieme B , di uno spazio ad un certo arbitrario numero di dimensioni, considero il generale procedimento di sommazione, su A e relativo alla (2), al variare del punto Q in B . Do il nuovo concetto di procedimento di sommazione, su A e relativo alla (2), *uniforme in B* . Per tali procedimenti stabilisco i teoremi della continuità e della derivabilità termine a termine. Il primo si enuncia al modo seguente:

La minima e la massima somma $u'(Q)$ e $u''(Q)$ della serie (1), su A e relative alla (2), siano sempre finite in B , mentre i termini della serie sono tutti funzioni continue nel punto Q_0 , appartenente a B e al suo derivato; se il procedimento di sommazione è uniforme in B , entrambe le somme $u'(Q)$ e $u''(Q)$ risultano, esse pure, continue in Q_0 .

Per le serie di funzioni studio anche l'integrazione termine a termine rispetto al generale procedimento di sommazione. A tale scopo riprendo a considerare dapprima la teoria del passaggio al limite sotto il segno integrale, aggiungendo ad essa taluni teoremi che possono riguardare come l'estensione nel campo dell'integrazione lebesghiana di quelli che trovansi esposti ai nn.ⁱ 94 e 95 delle già citate mie *Lezioni d'Analisi infinitesimale*. Supposto misurabile l'insieme B e misurabili le funzioni $u_0(Q)$, $u_1(Q)$, ..., termini della serie (1), definite in quell'insieme, ottengo due generali teoremi sull'integrazione termine a termine della serie, dei quali quello che potrà forse ricevere più frequenti applicazioni si enuncia così:

Al divergere dell'indice k , riesca definitivamente e indipendentemente da Q ,

$$|u_0(Q) + u_1(Q) + \dots + u_k(Q)| \leq \sigma(Q),$$

ove $\sigma(Q)$ è una certa funzione di Q , definita in B e su di questo integrabile. Allora, la minima somma $u'(Q)$ e la massima somma $u''(Q)$ della serie (1), su A e relative alla (2), risultano entrambe integrabili su B , laddove — designando T il più arbitrario insieme misurabile contenuto in B — l'intervallo di indeterminazione del procedimento

di sommazione, su A e relativo alla (2), della serie

$$\int_T u(Q) dT + \int_T u_1(Q) dT + \dots + \int_T u_n(Q) dT + \dots$$

è contenuto nell'intervallo

$$\left(\int_T u'(Q) dT, \int_T u''(Q) dT \right).$$

Facendo ricorso al teorema di MORERA, se ne deduce il seguente sulle « Serie di funzioni analitiche ».

Le funzioni della serie (1) siano analitiche, monodrome, finite e continue in ogni punto dell'insieme aperto B del piano complesso $z = x + iy$. La serie sia, in ogni punto di B , convergente, su A e relativamente alla (2), mentre, in ogni dominio rettangolare contenuto in B , il procedimento di sommazione, su A e relativo alla (2), sia uniforme. Allora la somma $u(z)$ della serie, fornita da tale procedimento, è pur essa una funzione analitica, monodroma, finita e continua in ogni punto di B e la serie delle derivate k^{ma} ($k=1, 2, \dots$) possiede tutte le proprietà della (1), avendo per somma, su A e relativa alla (2), la derivata k^{ma} di $u(z)$.

Torino, 27 settembre 1924.

Intorno alla dimostrazione di un teorema di Noether.

Nota di OSCAR CHISINI

Nell'ultimo fascicolo di questo *Bollettino* (15 ottobre 1924, pag. 162) C. ROSATI pubblica una sua Nota « Sopra un teorema di NOETHER ». Ora, essendo attratta l'attenzione dei nostri geometri su tale argomento, credo non inutile presentare anche una dimostrazione, semplicissima, che da parte mia avevo avuto occasione di svolgere, tanto più che il teorema in causa, e così la dimostrazione relativa, non figura nelle « Lezioni sulla Teoria geometrica delle equazioni » di ENRIQUES-CHISINI.

Eccola.

Cominciamo ad osservare una cosa ovvia e notissima.

Sopra una curva f , di genere $p > 1$, sia

$$|G_m| = g_m^{r_m}$$