UMI

Recensioni

* L. Bianchi, Lezioni sulla teoria dei numeri algebrici
* P. Montel: Statique et résistance des matériaux.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **3** (1924), n.4, p. 176–181.

Unione Matematica Italiana

¡http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1924_1_3_4_176_0¿

RECENSIONI

L. Bianchi: *Lezioni sulla teoria dei numeri algebrici.* Bologna, N. Zanichelli, 1923.

Il Maestro espone agli studiosi, in magnifica sintesi, i resultati più recenti della *Teoria dei numeri algebrici.* L' opera è magistralmente concepita, le teorie vi si succedono mirabilmente connesse, e le chiare dimostrazioni portano in modo semplicissimo a resultati di tanto interesse che lo studioso ne resta avvinto. Quest' opera permette di cimentarsi con le più elevate questioni di *Teoria dei numeri*, e chi aggiunga alle cognizioni acquisite quelle da Lui fornite nelle Sue *Lezioni sulla teoria dei gruppi di sostituzioni e delle equazioni algebriche secondo Galois* (1) e nelle *Lezioni sulla teoria aritmetica delle forme quadratiche binarie e ternarie* (2) potrà spaziare nel vasto campo della Teoria dei numeri, riconoscente verso il geniale Maestro che ha sì potentemente contribuito alla diffusione delle scienze matematiche in Italia.

Nei primi 9 capitoli, di cui indicherò gli argomenti e i resultati più notevoli, sono esposte quelle parti fondamentali della teoria che richiedono la conoscenza dell' algebra. Loro caratteristica essenziale è la descrizione di procedimenti finiti mediante i quali si possono costruire tutti gli enti aritmetici di volta in volta introdotti.

Il Cap. I « *Preliminari di aritmetica razionale colle prime nozioni della metrica di Minkowski* » tratta tre argomenti: 1°) la risolubilità in numeri interi di un sistema di equazioni lineari a coefficienti interi per i quali si arriva ad un teorema corrispondente a quello del Capelli sui sistemi lineari; 2°) l' equivalenza delle sostituzioni

(1) Pisa. Spoerri, 1899.

(2) *Lezioni autografate.* Pisa, 1910-1911.

lineari per sostituzioni lineari unimodulari di cui lo studio è estremamente facilitato dalla loro riduzione a particolari tipi di sostituzioni ridotte; 3°) i teoremi del MINKOWSKI sulle forme lineari, di cui l'enunciato nel senso *forte* è il seguente: Date n forme $f_i = \sum_k^{1 \dots n} a_{i,k}\, x_k$, $(i = 1, 2, \dots, n)$ a coefficienti reali e con determinante $D > 0$, scelte n quantità positive arbitrarie $D_1, D_2, \dots, D_n$ tali che si abbia $D_1 D_2 \dots D_n = D$, si può con un numero *finito* di prove assegnare alle x valori interi non tutti nulli in modo che si abbia $|f_i| < D_i$; $i = 1, 2, \dots, n-1$; e $|f_n| \leq D_n$. L'A. premette la dimostrazione analitica di HURWITZ, studia poi il significato geometrico del teorema servendosi del suggestivo concetto di *metrica aritmetica del Minkowski.*

Nel Cap. II « *Il campo di Gauss e i campi quadratici* » sono estesi i resultati del Cap. I ai numeri del campo di GAUSS, e in generale ai campi per i quali è valido l'algoritmo delle divisioni successive. Viene quindi studiato il fenomeno della scomposizione di un numero in prodotto di fattori indecomponibili; si trova allora che la decomponibilità unica nei campi ad algoritmo euclideo (condizione sufficiente) non è più vera in generale, e l'A. per facilitare la comprensione dei capitoli successivi introduce il concetto di *ideale* secondo DEDEKIND.

Nel Cap. III « *Proprietà fondamentali dei numeri algebrici. Corpi algebrici finiti* » sono definiti i concetti di *numero algebrico* (radice di un'equazione algebrica a coefficienti razionali); *grado di un numero algebrico* (grado dell'equazione $f(x) = 0$ di grado minimo a coefficienti razionali cui esso soddisfa); *numeri algebrici coniugati* (le radici dell'equazione $f(x) = 0$); *numeri interi algebrici* (la corrispondente equazione $f(x) = 0$ ha il primo coefficiente uguale ad 1 e gli altri coefficienti razionali interi); *campo di integrità* e *corpo o campo di razionalità* (insieme di numeri algebrici che si riproduce rispettivamente per gli operatori $+, -, \times$; $+, -, \times, :$); *corpo finito di grado n e base del corpo* (un insieme di numeri esprimibili con la forma $c_1\omega_1 + c_2\omega_2 + \dots + c_n\omega_n$ con le c_i razionali arbitrari, e con gli elementi $[\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n]$ della *base*, interi algebrici linearmente indipendenti); *numero primitivo o generatore di un corpo di grado* n *ed equazione fondamentale del corpo* (se θ indica un tal numero, le potenze $1, \theta, \theta^2, \dots \theta^{n-1}$, formano una base, e l'equazione $f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n = 0$ a coefficienti razionali interi cui θ soddisfa chiamasi equazione fondamentale del corpo) *forma ridotta di un numero del corpo* (la sua espressione univocamente determinata per la base $1, \theta, \theta^2, \dots, \theta^{n-1}$); *norma, traccia, differente* (HILBERT) *di un numero* α [usando rispettivamente per questi numeri i simboli $N\alpha$, $T(\alpha)$, $\delta(\alpha)$, e indicando $\alpha^{(1)}, \alpha^{(2)}, ..., \alpha^{(n-1)}$ i coniugati di α si ha:

$$N\alpha = \alpha\alpha^{(1)}\alpha^{(2)} ... \alpha^{(n-1)}; \quad T(\alpha) = \alpha + \alpha^{(1)} + \alpha^{(2)} + ... + \alpha^{(n-1)};$$
$$\delta(\alpha) = (\alpha - \alpha^{(1)})(\alpha - \alpha^{(2)}) ... (\alpha - \alpha^{(n-1)});]$$

discriminante d(α) *di un numero* α *e discriminante* $\Delta(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ *di* n *numeri* $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ le espressioni:

$$d(\alpha) = \begin{vmatrix} 1, & 1, ..., & 1 \\ \alpha, & \alpha^{(1)}, ..., & \alpha^{(n-1)} \\ \alpha^2, & \alpha^{(1)^2}, ..., & \alpha^{(n-1)^2} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha^{n-1}, & \alpha^{(1)^{n-1}}, ..., & \alpha^{(n-1)^{n-1}} \end{vmatrix}^2 ; \quad \Delta(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n) = \begin{vmatrix} \alpha_1, & \alpha_2, ..., & \alpha_n \\ \alpha_1^{(1)}, & \alpha_2^{(1)}, ..., & \alpha_n^{(1)} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_1^{(n-1)}, & \alpha_2^{(n-1)}, ..., & \alpha_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

È importante per un corpo algebrico di grado n costruire una *base minima*, cioè una base $(\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n)$ tale che tutti gli interi del corpo abbiano la forma $h_1\omega_1 + h_2\omega_2 + ... + h_n\omega_n$ con le $h_1, h_2, ..., h_n$ (*coordinate del numero*) interi razionali. Tali basi possono costruirsi con un numero *finito* di prove ed hanno discriminante uguale e minimo. Esso prende il nome di *numero fondamentale* o *discriminante del corpo*; indicandolo con D, escluso il campo razionale è $|D| > 1$ (MINKOWSKI) e se il corpo è di grado n si ha anche (MINKOWSKI) $D > \left(\frac{\pi}{4}\right)^{2s} \frac{e^{2n - \frac{1}{6n}}}{2\pi n}$, ($s$ numero delle coppie delle radici complesse dell'equazione fondamentale).

Nel Cap. IV « *Le unità dei corpi algebrici* » sono esposte le classiche ricerche di DIRICHLET sulle unità dei corpi, e le semplificazioni che la teoria trae dalle elegantissime dimostrazioni di MINKOWSKI.

Unità ε *di un corpo algebrico* è un numero che divide 1 e quindi ogni altro intero del corpo, perciò $N\varepsilon = \pm 1$. Una geniale estensione di un lemma di LAGRANGE permette a DIRICHLET di provare: 1°) In un corpo algebrico esistono infinite unità di norma *positiva* e di modulo $\neq 1$. 2°) Indicando con ν la somma del numero delle radici reali e del numero delle coppie di radici complesse dell'equazione fondamentale, esistono $\nu - 1$ unità $\varepsilon_1, \varepsilon_2, ..., \varepsilon_{\nu-1}$ di norma positiva tali che il numero $\varepsilon_1^{r_1} \varepsilon_2^{r_2} .... \varepsilon_{\nu-1}^{r_{\nu-1}}$ facendo percorrere agli esponenti $r_1, r_2, ..., r_{\nu-1}$ tutti i numeri razionali interi genera un gruppo moltiplicativo G di infinite unità *tutte diverse tra loro* e il gruppo G ha un indice finito k nel gruppo totale Γ delle unità del corpo.

La teoria culmina in fine nel teorema capitale di DIRICHLET che fa conoscere ad un tempo e le unità di un corpo algebrico e la loro legge di composizione. Esistono nel corpo $\nu - 1$ unità di norma positiva $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_{\nu-1}$ tali che ogni altra unità del corpo ha la forma $e^{\frac{2\pi i m}{k}} \varepsilon_1^{m_1} \varepsilon_2^{m_2} \ldots \varepsilon_{\nu-1}^{m_{\nu-1}}$ con $m = 0, 1, 2, \ldots, k-1$; ed $m_1, m_2, \ldots, m_{\nu-1}$ interi razionali arbitrari. Questo teorema vale anche nel caso $\nu = 1$, cioè per il corpo razionale e i corpi quadratici immaginari, ma in questo caso non restano che le due unità ± 1, eccettuati i corpi $K(i)$ e $K\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)$ per i quali si hanno 4 o 6 unità.

Il teorema di DIRICHLET permette di studiare i *numeri associati* di un numero α, cioè gli infiniti numeri ($\nu > 1$) ottenuti da α moltiplicandolo per tutte le unità del corpo, i quali nelle questioni di divisibilità si comportano come un sol numero. Si arriva così all' importante risultato: le decomposizioni essenzialmente distinte di uno stesso numero in prodotti di fattori indecomponibili sono in numero finito.

Il Cap. V « *Ideali nei corpi algebrici. Moltiplicazione e divisibilità. Decomposizione in ideali primi* » tratta la teoria degli ideali con la quale KUMMER e DEDEKIND ristabiliscono nell' aritmetica dei corpi algebrici le leggi della divisibilità dell' aritmetica razionale. L'A. espone la teoria secondo DEDEKIND e rimanda al Cap. VII lo studio dei *fattori ideali* di KUMMER.

Ideale A di un corpo algebrico $K(\theta)$ è un sistema di numeri interi del corpo per il quale sono soddisfatte le due leggi seguenti: *a*) la somma e la differenza di due numeri qualunque di A è un numero di A; *b*) il prodotto di un numero qualunque di A per un intero arbitrario del corpo $K(\theta)$ appartiene ad A. Evidentemente se $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_q$ sono q numeri interi di $K(\theta)$ e si formano tutti i numeri $\alpha = \lambda_1\alpha_1 + \lambda_2\alpha_2 + \ldots + \lambda_q\alpha_q$, come $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_q$ interi arbitrari di $K(\theta)$, essi generano un ideale che si indica, ponendo in evidenza i numeri generatori con $A = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_q)$. L' ideale che si può generare con un sol numero α chiamasi *ideale principale*, in caso contrario si dirà *secondario*. Se $A(\alpha)$ è un ideale principale generato dal numero α, ed α è una unità, l'ideale consta di tutti gli interi del corpo e prende il nome di *ideale unità*.

Dato un ideale qualunque, è sempre possibile scegliere in infiniti modi n numeri $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ in guisa che ogni numero dell' ideale abbia la forma $h_1\alpha_1 + h_2\alpha_2 \ldots + h_n\alpha_n$ con $h_1, h_2, \ldots, h_n$ interi razionali; questi numeri $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ formano una *base dell' ideale* A che si indicherà con $A = [\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n]$.

Norma NA di un ideale A è il numero razionale intero positivo $NA = + \sqrt{\frac{\Delta(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)}{D}}$ essendo $\Delta(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ il discriminante della base dell'ideale e D il numero fondamentale del corpo. Qualunque sia l'ideale, esso contiene sempre infiniti numeri interi razionali multipli del minimo di essi e fra questi vi è sempre la norma dell'ideale.

L'A. passa quindi ad esporre le operazioni sugli ideali. Se $A = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_q)$, $B = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_s)$ chiamasi *ideale prodotto*, l'ideale AB che ha per numeri generatori i qs prodotti $\alpha_i\beta_h$; caratteristica del prodotto di due ideali è che ogni numero del prodotto appartiene a ciascuno dei fattori, ma non inversamente. Se un ideale C si risolve nel prodotto di un ideale A per un altro ideale B, C si dice divisibile per A e B chiamasi *ideale quoziente*. Condizione necessaria e sufficiente perchè C sia divisibile per A è che C sia contenuto in A. Poste poi le definizioni di *ideale primo*, (ideale diverso dall'ideale unità divisibile soltanto per se stesso e l'ideale unità), *ideali primi tra loro* (ideali che hanno per divisore comune soltanto l'ideale unità) con rapido esame si ritrova stabilita la perfetta analogia tra le proprietà relative alla divisibilità degli ideali nei corpi algebrici e le proprietà della divisibilità dell'aritmetica razionale.

Quanto agli ideali primi di un corpo è da notare che il più piccolo numero razionale p contenuto in essi è un numero primo (*numero primo coordinato all' ideale*) ed esiste un esponente f (grado dell'ideale primo) minore del grado n del corpo per il quale si ha $p^f = NA$.

Si hanno a questo punto gli elementi per studiare la decomponibilità dei numeri nei corpi algebrici da cui ha avuto origine la creazione della teoria degli ideali.

Si dimostra infatti che per i numeri dei corpi privi di ideali secondari (tali corpi sono *estremamente* rari) valgono gli stessi teoremi della divisibilità dei numeri interi razionali, e quando ciò non sia, esistono dei numeri indecomponibili del corpo che non funzionano come numeri primi e conseguentemente un numero può decomporsi in più modi in prodotto di fattori indecomponibili. *(continua)*

P. Montel: *Statique et Résistance des Matériaux.* Parigi, Gauthier-Villars, 1924, pag. VI+274.

L'A. raccoglie in questo libro le lezioni svolte alla Scuola Superiore di Belle Arti di Parigi; in esse secondando la mentalità prevalentemente geometrica del suo pubblico egli ha creduto opportuno — come ci avverte nella prefazione — di dare la preferenza ai metodi grafici, almeno sino a che le costruzioni non divengano troppo complicate.

La scelta di questo punto di vista è certamente opportuna, ma a me sembra che nello svolgimento l'A. — che è un distinto matematico — abbia talvolta sacrificato alla unità di esposizione la interpretazione dei fenomeni e la scelta degli argomenti.

Il volume contiene, nei primi sette capitoli, un compendio — ben proporzionato — di statica grafica: vi si studiano prima i poligoni funicolari, i momenti e le forze parallele con i baricentri; poi le reazioni di appoggio, le travature reticolari e i momenti statici e di inerzia.

La teoria della resistenza dei materiali si inizia nel cap. 8° dove, dopo un cenno sulle azioni di una porzione di solido su di un'altra, si passa subito allo studio della trave decomponendo la forza agente su una sezione nello sforzo normale, nel taglio e nella coppia flettente; però qui è da osservare che l'A. considera la sezione nel suo complesso senza porre il problema se a forze di eguale risultante corrispondano sempre eguali sollecitazioni interne: la mancanza degli altri tipi di sollecitazione (torsione, flessioni deviate) dipende dal fatto che l'A. suppone il solido dotato di un piano di simmetria coincidente col piano delle forze, ma a me sembra che questa restrizione non sia opportuna nemmeno in un corso elementare quale è quello svolto dall'A.; infatti, troppi e troppo frequenti sono i casi in cui si presenta la flessione deviata (per es. negli ascarecci dei tetti), perchè sia possibile non farne un cenno.

La flessione è studiata anche nel cap. 9°, mentre i casi composti di sollecitazione sono considerati nell' 11°; il 10° tratta della trave continua (esposta per mezzo della equazione dei tre momenti) e l'ultimo (il 12°) si riferisce agli archi.

Qua e là si ha qualche cenno — eccessivamente scarso e a mio giudizio non sempre preciso — sulle esperienze di resistenza e sui coefficienti elastici; inoltre ogni capitolo del libro è corredato di esercizi; di questi nella prima parte qualcuno si riferisce a proprietà secondarie non dimostrate nel testo, ma i più propongono calcoli numerici su la materia svolta e su le travature più comuni.

GIULIO SUPINO