Bollettino
Unione Matematica
Italiana

Carlo Rosati

Sopra un teorema di Noether

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **3** (1924), n.4, p. 162–167.

Unione Matematica Italiana

¡http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1924_1_3_4_162_0¿

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

Articolo digitalizzato nel quadro del programma bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica) SIMAI & UMI
http://www.bdim.eu/

Sopra un teorema di Noether.

Nota di CARLO ROSATI

È noto come il « Lückensatz » di WEIERSTRASS sia stato da NOETHER [1] generalizzato con la proposizione: *In un gruppo non speciale* G_n *di* n *punti sopra una curva* f *di genere* $p > 1$, *è possibile ordinare i punti in guisa che, detto* G_i *il gruppo costituito dal* 1°, 2° ... i^{mo} *punto, fra le funzioni razionali dell'ente aventi come gruppi di poli i gruppi* G_i $(i = 1, 2, \ldots n)$ *manchino quelle corrispondenti a* p *valori dell'ordine.*

Però l'ordinamento del gruppo dato da NOETHER può non rispondere alla condizione richiesta se non si tiene conto di una osservazione la quale, sebbene semplice, è essenziale per il rigore delle deduzioni. Credo perciò non inutile esporre la dimostrazione del teorema come è stata da me svolta nel corso di Geometria superiore tenuto quest'anno nell'Università di Pisa.

In linguaggio geometrico la proposizione può enunciarsi così: *Dato sopra una curva* f *del genere* $p > 1$ *un gruppo non speciale* G_n *di* n *punti disposti in un ordine qualsiasi, e indicato con* G_i *il gruppo costituito dal* 1°, 2°, ... i^{mo} *punto, il numero delle serie complete* $|G_i$ $(i = 1, 2, \ldots n)$ *dotate di punti fissi è* $\geq p$; *ed esistono ordinamenti del gruppo per cui le dette serie sono in numero di* p.

La prima parte del teorema è di dimostrazione immediata. Sia infatti P_1 il primo punto del gruppo, e Σ indichi il sistema lineare delle curve φ, aggiunte di ordine $m - 3$ (m essendo l'ordine di f). Le φ passanti per P_1 formano un sistema lineare ∞^{p-2}, Σ_1, avente fra i suoi punti base al più uno dei rimanenti punti del gruppo. Se P_{i_1} è il primo dei punti seguenti P_1 non contenuto in tutte le curve di Σ_1, le curve di Σ_1 passanti per P_{i_1}, formano un sistema lineare ∞^{p-3}, Σ_2, che non potrà avere fra i suoi punti base tutti i punti seguenti P_{i_1}. Così continuando, si giungerà a un punto $P_{i_{p-2}}$ e a un sistema Σ_{p-1} ∞^0, cioè costituito da una sola curva φ, la quale conterrà $P_{i_{p-2}}$ e tutti i punti del gruppo che precedono questo punto, ma non tutti quelli che seguono. Se allora $P_{i_{p-1}}$ è il primo fra i punti seguenti $P_{i_{p-2}}$ non appartenente alla detta curva φ, le serie complete individuate dai gruppi G_1, G_{i_1} ... $G_{i_{p-1}}$ ammettono rispettivamente, per il teorema

[1] NOETHER: *Beweis und Erweiterung eines algebraisch-functionentheoretischen Satzes des Herrn Weierstrass*, « Journal für die reine und angewandte Mathematik », Bd. 97 (1884).

di riduzione, i punti fissi $P_1, P_{i_1}, \dots P_{i_{p-1}}$. Il numero delle serie $|G_i|$ $(i = 1, 2, \dots n)$ dotate di punti fissi è dunque $\geq p$.

Si indichino ora con

$$(\alpha) \qquad A_1 \quad A_2 \quad A_3 \quad \dots \quad A_n$$

i punti del gruppo dato disposti in un ordine qualsiasi e supponiamo dapprima che imponendo alle curve φ del sistema Σ successivamente il passaggio pei punti $A_1, A_2, \dots$ si giunga ad un punto A_k tale che le φ per $A_1, A_2, \dots A_k$ contengano di conseguenza altri punti del gruppo. Dicendo Q_1 uno qualsiasi di questi e supponendo che A_k sia il primo punto di (α) per cui si verifichi la circostanza ammessa, le condizioni imposte alle φ dai punti $A_1 \dots A_k$ saranno indipendenti, mentre la condizione imposta da Q_1 è dipendente da quelle; ma la dipendenza può non essere in *senso strétto* [1]. In tal caso potremo, sopprimendo nel gruppo $A_1 \dots A_k$ alcuni dei punti $A_1 \dots A_{k-1}$, far sì che la condizione imposta da Q_1 dipenda in senso stretto da quelle imposte dai punti rimanenti. Dicasi $P_1\, P_2 \dots P_\mu$ il gruppo dedotto da $A_1 \dots A_k$ dopo questa eventuale soppressione. Le curve di Σ passanti per $P_1\, P_2 \dots P_\mu$ formano un sistema lineare Σ_1 di dimensione $p - 1 - \mu \geq 0$ e tutte contengono Q_1. Supposto che contengano altri punti $Q_2 \dots Q_\nu$ di G_n, il gruppo

$$(1) \qquad P_1 \dots P_\mu, \quad Q_1 \dots Q_\nu$$

possiede le proprietà:

a) I punti $P_1 \dots P_\mu$ impongono condizioni indipendenti alle curve del sistema Σ.

b) Le curve di Σ per $P_1 \dots P_\mu$ contengono tutte i punti $Q_1\, Q_2 \dots Q_\nu$.

(1) Se, dato un sistema lineare ∞^h di curve

$$\lambda_0\varphi_0 + \lambda_1\varphi_1 + \dots + \lambda_h\varphi_h = 0,$$

un gruppo $A_1 \dots A_l$ di l punti impone $l - 1$ condizioni alle curve del sistema che debbono contenerli, $(l \leq h+1)$, la matrice

$$\left\| \begin{matrix} \varphi'_0 & \varphi'_1 & \dots & \varphi'_h \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \varphi_0^{(l)} & \varphi_1^{(l)} & \dots & \varphi_h^{(l)} \end{matrix} \right\|$$

in cui $\varphi_r^{(i)}$ indica il risultato della sostituzione in φ_r delle coordinate del punto A_i, è nulla (cioè sono nulli tutti i suoi minori di ordine l), ma non è nulla una almeno delle matrici dedotte da essa sopprimendo una riga. Se, qualunque sia la riga soppressa, la matrice ottenuta è sempre $\neq 0$, si dice che le condizioni imposte dai punti $A_1 \dots A_l$ sono dipendenti *in senso stretto*, o che una di esse dipende in senso stretto dalle rimanenti.

c) La condizione imposta da Q_1 alle curve di Σ dipende in senso stretto da quelle imposte da $P_1 \dots P_\mu$.

Si tolgano da (α) i punti del gruppo (1) e si indichino con

$$(\beta) \qquad B_1 \quad B_2 \quad \dots \quad B_{n-(\mu+\nu)}$$

i punti rimanenti in un ordine qualsiasi.

Se è $p-1-\mu>0$ e se in (β) esiste un punto B_l tale che le curve di Σ_1 per i punti $B_1 \dots B_l$ contengano altri punti di (β), potremo estrarre da (β) un gruppo

$$(2) \qquad P'_1 \dots P'_{\mu_1}, \quad Q'_1 \dots Q'_{\nu_1}$$

avente rispetto a Σ_1 le stesse proprietà *a) b) c)* che il gruppo (1) ha rispetto a Σ. Diremo Σ_2 il sistema di dimensione $p-1-\mu-\mu_1 \geq 0$ costituito dalle curve di Σ_2 contenenti i punti (2) e

$$(\gamma) \qquad C_1 \quad C_2 \quad \dots \quad C_{n-(\mu+\nu)-(\mu_1+\nu_1)}$$

i punti rimanenti di (β) disposti in un ordine qualsiasi.

Se è $p-1-\mu-\mu_1>0$ e se in (γ) esiste un punto C_m analogo ai punti A_k, B_l, si opererà su (γ) come già facemmo su (α) e su (β). Il procedimento si arresterà quando si giunge a un k^{mo} gruppo

$$(k) \qquad P_1^{(k-1)} \dots P^{(k-1)}_{\mu_{k-1}}, \quad Q_1^{(k-1)} \dots Q^{(k-1)}_{\nu_{k-1}}$$

cui corrisponde un sistema Σ_k di dimensione

$$p-1-\mu-\mu_1-\dots-\mu_{k-1}=0,$$

ovvero quando, pur essendo

$$p-1-\mu-\mu_1-\dots-\mu_{k-1}>0,$$

nel gruppo

$$(\lambda) \qquad L_1 \quad L_2 \quad \dots \quad L_{n-(\mu+\nu)-\dots-(\mu_{k-1}+\nu_{k-1})},$$

ottenuto da (α) dopo avere soppressi i gruppi (1) (2) ... (k), non esiste alcun punto L, analogo ai punti A_k, B_l, C_m ....

Nel 1° caso si indichi con $P_1^{(k)}$ uno qualsiasi dei punti (λ), con $Q_1 \dots Q_{\nu_k}$ $(\nu_k=n-(\mu+\nu)-\dots-(\mu_{k-1}+\nu_{k-1})-1)$ i rimanenti e si dispongano i punti di G_n nell'ordine

$$(\mathrm{I}) \qquad \begin{gathered} P_1 \dots P_\mu, \quad Q_1 \dots Q_\nu; \quad P'_1 \dots P'_{\mu_1}, \quad Q'_1 \dots Q'_{\nu_1}; \dots; \\ P_1^{(k-1)} \dots P^{(k-1)}_{\mu_{k-1}}, \quad Q_1^{(k-1)} \dots Q^{(k-1)}_{\nu_{k-1}}; \quad P_1^{(k)}, \quad Q_1^{(k)} \dots Q^{(k)}_{\nu_k} \\ (\mu+\mu_1+\dots+\mu_{k-1}+1=p). \end{gathered}$$

Nel 2° caso, posto $p-1-\mu-\mu_1-\ldots-\mu_{k-1}=\mu_k$, per i punti $L_1\,L_2\ldots L_{\mu_k}$ passerà una sola curva di Σ_k la quale non conterrà alcuno dei punti rimanenti. Si consideri allora il gruppo $L_1\ldots L_{\mu_k}L_{\mu_k+1}$; se, sopprimendo in esso uno dei primi μ_k punti, l'unica curva di Σ_k passante per il gruppo residuo contenesse altri punti di (λ), sarebbe possibile, cambiando l'ordine, estrarre da (λ) un ulteriore gruppo analogo ad (1). Un caso nuovo si avrà dunque supponendo che la circostanza suddetta non si verifichi. In questa ipotesi, denoteremo con $P_1^{(k)}\ldots P_{\mu_k}^{(k)}\,P_{\mu_k+1}^{(k)}$ i punti dell'ultimo gruppo considerato, con $Q_1^{(k)}\ldots Q_{\nu_k}^{(k)}$ $(\nu_k=n-(\mu+\nu)-\ldots-(\mu_{k-1}+\nu_{k-1})-\mu_k-1)$ i rimanenti punti di (λ) e disporremo i punti di G_n nell'ordine

$$\text{(II)}\quad\begin{array}{c} P_1\ldots P_\mu,\ Q_1\ldots Q_\nu;\quad P'_1\ldots P'_1,\ Q'_{\mu_1}\ldots Q'_{\nu_1};\quad\ldots;\\ P_1^{(k-1)}\ldots P_{\mu_{k-1}}^{(k-1)},\quad Q_1^{(k-1)}\ldots Q_{\nu_{k-1}}^{(k-1)};\\ P_1^{(k)}\ldots P_{\mu_k}^{(k)}\,P_{\mu_k+1}^{(k)},\quad Q_1^{(k)}\ldots Q_{\nu_k}^{(k)}\\ (\mu+\mu_1+\ldots+\mu_{k-1}+\mu_k+1=p).\end{array}$$

Ciò posto, è facile provare che in entrambi gli ordinamenti (I) (II) ogni gruppo G_i terminante a un punto P individua una serie completa avente questo punto fisso. Se P appartiene al 1°, 2°...k^{mo} gruppo, ciò si deduce, in base al teorema di riduzione, dalla condizione *a)* cui soddisfano questi gruppi. Per il gruppo dell'ordinamento (I) terminante a $P_1^{(k)}$ la proprietà deriva dal fatto che sopprimendo in esso questo punto, l'unica φ passante per il gruppo residuo non contiene il punto stesso. Infine per i gruppi che nell'ordinamento (II) terminano ai punti $P_1^{(k)}\ldots P_{\mu_k}^{(k)}$, $P_{\mu_k+1}^{(k)}$ la proprietà discende da ciò che i primi μ_k punti presentano alle curve di Σ_k condizioni indipendenti e che l'unica curva di Σ_k passante per essi non contiene il $(\mu_k+1)^{mo}$. Se ora si prova che ogni gruppo G_i terminante a un punto Q individua una serie completa priva di punti fissi, il teorema sarà dimostrato.

Consideriamo dapprima la serie individuata dal gruppo $P_1\ldots P_\mu\,Q_1$. Per essa non è fisso Q_1, sempre in base al teorema di riduzione, per la condizione *b)* cui soddisfa il gruppo (1); e nemmeno alcuno dei punti precedenti, giacchè, se, ad es., P_i fosse fisso, il gruppo $P_1\ldots P_{i-1}\,P_{i+1}\ldots P_\mu\,Q_1$ imporrebbe alle curve di Σ una condizione di meno di quelle imposte dal gruppo $P_1\ldots P_\mu\,Q_1$, e quindi $\mu-1$ condizioni. Ma allora le curve di Σ per $P_1\ldots P_{i-1}\,P_{i+1}\ldots P_\mu$

dovrebbero tutte contenere Q_1, il che contraddice la condizione *c)* cui soddisfa il gruppo (1). Per i gruppi G_i terminanti ai punti $Q_2 ... Q_\nu$ la proprietà si verifica subito per induzione.

Per i punti Q del 2°, 3°, ... k^{mo} gruppo che sono stati ottenuti allo stesso modo del 1°, si può procedere ancora per induzione, cioè dimostrando che la proprietà sussiste per i punti Q del gruppo $(l+1)^{mo}$ quando si supponga verificata per quelli del gruppo l^{mo}. Perciò basterà limitarsi al primo $Q_1^{(l)}$, giacchè per gli altri vale lo stesso procedimento induttivo tenuto per i punti Q del 1° gruppo. Ora che la serie completa individuata dal gruppo G_i terminante a $Q_1^{(l)}$ non ha fissi nè questo nè alcuno dei punti $P_1^{(l)} .. P_{\mu_l}^{(l)}$, si dimostra con le stesse considerazioni fatte per il gruppo terminante a Q_1, sempre invocando il teorema di riduzione e le condizioni *b) c)* cui soddisfa il gruppo (l); dall'ipotesi fatta discende poi che non ha fisso alcuno dei punti precedenti $P_1^{(l)}$.

Rimane infine a considerare il gruppo G_i terminante a $Q_1^{(k)}$. La serie completa individuata da questo gruppo non ha fisso alcun punto della coppia $P_1^{(k)}\ Q_1^{(k)}$ ovvero alcun punto del gruppo $P_1^{(k)} ... P_{\mu_k}^{(k)}\ P_{\mu_k+1}^{(k)}, Q_1^{(k)}$ (secondochè G_i appartiene all'ordinamento (I) e a quello (II)) perchè sopprimendo in esso un punto di quella coppia o un qualsiasi punto di questo gruppo, il gruppo residuo è non speciale. Non ha poi fisso alcuno dei punti precedenti, per la superiore dimostrazione.

Osservazione I. È chiaro che la dimensione di ogni serie $|G_i|$ uguaglia il numero dei punti Q contenuti in G_i, e che la serie determinata da un G_i terminante a un punto P ha fissi questo punto e i punti P dello stesso gruppo ad esso precedenti.

Osservazione II. Dagli ordinamenti (I) (II) se ne possono ottenere altri soddisfacenti alla condizione richiesta. Tali sono i gruppi ottenuti da (I) (II):

a) permutando i punti P di ciascun gruppo;

b) eseguendo sui punti Q di ciascun gruppo le permutazioni che lasciano fermo il primo punto;

c) trasportando i punti $Q_2^{(l)} ... Q_{\nu_l}^{(l)}$ del gruppo l^{mo} $(l = 1, 2.., k)$ alla destra di uno qualsiasi dei gruppi successivi.

Osservazione III. Nell'ordinamento di NOETHER, dopo aver determinato il gruppo (1), si considerano i punti $P_{\mu_1}\ P_{\mu_2}\ P_{\mu_3}$ ... che impongono successivamente nuove condizioni alle φ passanti già per il gruppo (1), e tali punti si dispongono di seguito ad (1) separati dagli *eventuali* gruppi di punti che non impongono nuove condizioni alle φ passanti per (1) e successivamente per i punti suddetti.

Ma se alcuni dei punti P_{μ_1} P_{μ_2} P_{μ_3} ... si susseguono, può avvenire che la serie individuata dal gruppo terminante al punto successivo a un tal gruppo di punti susseguentisi possegga punti fissi e quindi essere $> p$ il numero delle serie $|G_i|$ dotate di punti fissi. Se ad es. (escludendo il caso iperellitico) i punti P_{μ_1} P_{μ_1+1} P_{μ_1+2} della curva canonica individuano un piano contenente un ulteriore punto P_{μ_1+3} della curva allineato con P_{μ_1+1} e P_{μ_1+2}, la serie individuata dal gruppo terminante a P_{μ_1+3} possiede P_{μ_1} come punto fisso.

Pisa, 25 maggio 1924.