Bollettino Unione Matematica Italiana

Luigi Lordi

Sulla determinazione del saggio d'interesse nelle rendite costanti

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **3** (1924), n.4, p. 160–161.

Unione Matematica Italiana

¡http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1924_1_3_4_160_0¿

Sulla determinazione del saggio d'interesse nelle rendite costanti.

Nota di LUIGI LORDI

Per determinare il saggio d'interesse in una rendita costante di cui sono noti gli altri elementi, conviene a preferenza applicare il metodo generale di NEWTON-FOURIER per l'approssimazione delle radici di un'equazione. Però questo metodo spedito generalmente nella prima approssimazione, se si dispone di un prontuario per calcoli finanziari, non lo è nelle successive.

Vogliamo esporre un modo di risoluzione del problema che in pratica riesce agevole, e che permettendo la costruzione di tabelle rende semplicissime le operazioni da eseguirsi.

Diciamo x il valore attuale della rendita unitaria, di cui n è la durata, i il saggio d'interesse, e poniamo come al solito $v = \frac{1}{1+i}$.

Derivando rispetto alla variabile x, di cui i si considera funzione, dalla relazione $x = \frac{1 - v^n}{i}$ si ha:

$$\frac{di}{dx} = \frac{i}{nv^{n+1} - x}$$

$$\frac{d^2i}{dx^2} = \frac{\left(\frac{di}{dx}\right)^2}{i}\left[n(n+1)v^{n+2}\frac{di}{dx} + 2\right].$$

Diremo per brevità $A(x)$, $B(x)$ le due derivate precedenti. Se i_0 ed x_0 è una coppia di valori per cui

$$x_0 = \frac{1 - v_0^n}{i_0},$$

potremo scrivere:

$$i(x) = i_0 + (x - x_0)A(x_0) + \frac{(x - x_0)^2}{2} B(x_r) \tag{1}$$

dove x_r è un valore intermedio tra x_0 ed x.

Ed in via di approssimazione

$$i(x) = i_0 + (x - x_0)A(x_0) + \frac{(x - x_0)^2}{2} B(x_0). \tag{2}$$

Osserviamo che $A(x)$ e $B(x)$ sono sempre rispettivamente negativa e positiva.

Per la prima è evidente, essendo $i(x)$ funzione decrescente di x. Per la seconda dimostriamo che è

$$n(n+1)\,v^{n+2}\,|A| < 2,$$

ovvero

$$\frac{n(n+1)v^{n+2}i^2}{1-v^n-nv^{n+1}i} < 2; \quad n(n+1)v < 2\left\{\binom{n}{2} + \binom{n}{3}i + \ldots\right\},$$

che è evidente essendo il saggio per sua natura sempre positivo.

Per i valori di n e di i generalmente considerati nei prontuari finanziari si può costruire facilmente una tabella dei valori delle funzioni $A(x)$, $B(x)$, ed allora per qualunque x assegnato il valore approssimato dato dalla (2) si calcola immediatamente.

Per l'errore σ che si commette prendendo per il saggio il valore dato dalla (2) anzichè quello dato dalla (1) si può ritenere

$$\sigma < \frac{(x-x_0)^2}{2}\,|B(x_0)-B(x_1)| \tag{3}$$

dove x_0 ed x_1 sono due numeri sufficientemente vicini e che comprendono nel loro intervallo il valore x che si deve considerare.

Facciamo per esempio $x = 20$, $n = 40$. Da un prontuario finanziario si vede che il saggio corrispondente è compreso tra 0,04 e 0,035.

Partendo dal valore per eccesso 0,04 per cui

$$x = 19{,}79277388; \quad \log(-A) = \bar{3}{,}5308537; \quad \log B = \bar{4}{,}4270784;$$

si trova applicando la (2)

$$i = 0{,}03930219.$$

Per giudicare quante cifre decimali possiamo ritenere esatte nel valore calcolato, consideriamo B per valori inferiori al saggio che si cerca.

$$\text{Per } i = 0{,}035, \text{ si ha } \log B(x_1) = \bar{4}{,}3216752.$$

Tenendo allora presente l'espressione (3) si vede che le prime cinque cifre decimali dànno un valore del saggio approssimato per difetto a meno di $\frac{1}{10^5}$. Si potrebbe giudicare di altre cifre decimali restringendo l'intervallo, cioè calcolando B per un saggio, sempre inferiore al saggio che si cerca, ma maggiore al 0,035 e tenendo conto di nuovo della (3).