Bollettino Unione Matematica Italiana

Corradino Mineo

Sopra alcune serie di polinomi di Legendre

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **3** (1924), n.4, p. 156–159.

Unione Matematica Italiana

¡http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1924_1_3_4_156_0¿

Sopra alcune serie di polinomi di Legendre.

Nota di CORRADINO MINEO

1. La serie

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2n+1}{n-1} X_n(\cos\gamma), \tag{1}$$

dove X_n è il polinomo di LEGENDRE di n^{mo} grado, s'incontra in una fondamentale Memoria di STOKES sulla determinazione della forma della Terra per mezzo delle misure di gravità (¹); ma l'autore ne trova la somma, per i valori reali di γ tali che sia $\cos^2\gamma < 1$, con un procedimento non del tutto giustificato.

Il PIZZETTI (²) assegna facilmente la somma della (1), dopo aver sommato le due serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} X_n(\cos\gamma), \tag{2}$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{X_n(\cos\gamma)}{n-1}; \tag{3}$$

ma, per sommar la (2), pone $\alpha=1$ nella formula

$$(1-2\alpha\cos\gamma+\alpha^2)^{-\frac{1}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n X_n(\cos\gamma),$$

(¹) *On the variation of gravity at the surface of the Earth.* Mathematical and Physical Papers, Vol. II.

(²) *Principii della teoria meccanica della figura dei pianeti* (Pisa, 1913), pp. 116-117.

il che non è lecito; e, per sommar la (3), integra rispetto ad α i due membri dell'equazione precedente (dopo averli divisi per α^2) nell'intervallo $(0, 1)$, il che non è neppure giustificato.

L'HELMERT [1], per determinar la somma della (1), segue il procedimento dello STOKES, senza riuscire a giustificarlo interamente; sebbene egli sia il primo (almeno per quanto io sappia), che dimostri rigorosamente la convergenza della (2), nel caso predetto, e ne assegni la somma, partendo da un'espressione di X_n dovuta al MEHLER [2] e facilmente deducibile dalle note formule di DIRICHLET.

Dopo la dimostrazione dell'HELMERT, è poi facile giustificare il procedimento del PIZZETTI per sommar la (3) e quindi quello seguito per la (1).

Ma lo studio delle serie anzidette, e di altre più generali, si fa assai meglio e più rapidamente, giovandosi della formula di LAPLACE, anzichè di quella del MEHLER: in particolare, le somme delle (2) e (3) si ottengono subito in modo diretto.

2. Sia

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n X_n (\cos \gamma), \tag{4}$$

la serie proposta, dove i coefficienti a_i sono numeri reali o complessi; e limitiamoci a considerare il caso che γ prenda valori reali. Per la formula di LAPLACE, si ha

$$\sum_{r=0}^{r=n} a_r X_r (\cos \gamma) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sum_{r=0}^{r=n} a_r (\cos \gamma + i \operatorname{sen} \gamma \cos \varphi)^r \, d\varphi. \tag{5}$$

Posto

$$z = \cos \gamma + i \operatorname{sen} \gamma \cos \varphi, \tag{6}$$

se la serie di potenze

$$a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots. \tag{7}$$

ha un raggio di convergenza R maggior d'uno, la (7), considerata come funzione di φ, è assolutamente e uniformemente convergente

(1) *Die mathematischen und physikalischen Theorieen der höheren Geödasie* (Lipsia, 1884), Vol. II, pp. 251-253 e pp. 54-55.

(2) Vedi HEINE: *Theorie der Kugelfunctionen* (Berlin, 1878), Parte I, p. 44.

nell'intervallo $(0, \pi)$, qualunque sia il numero reale γ; sicchè, detta $S(\varphi, \gamma)$ la somma della (7), si potrà, nel 2° membro della (5), passare al limite sotto il segno integrale, e si avrà

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n X_n(\cos\gamma) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} S(\varphi, \gamma)\, d\varphi. \tag{8}$$

Se $R = 1$ e se la (7) converge anche sul cerchio di convergenza, salvo i punti $z = \pm 1$, allora la (8) sussiste per ogni valore di γ tale che sia

$$\cos^2\gamma < 1. \tag{9}$$

Se, essendo $R = 1$, la (7) non converge sul cerchio di convergenza, essa, considerata come funzione di φ, è assolutamente e uniformemente convergente, quando, nell'ipotesi (9), la φ varia nell'intervallo $(\delta, \pi - \delta)$, per quanto piccolo sia il numero positivo δ. Supposto, allora, che la funzione $S(\varphi, \gamma)$ risulti integrabile in tutto l'intervallo $(0, \pi)$, si potrà scrivere

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} S(\varphi, \gamma)\, d\varphi - \sum_{r=0}^{r=n} a_r X_r(\cos\gamma) = \frac{1}{\pi}\int_{\delta}^{\pi-\delta}\left\{ S(\varphi,\gamma) - \sum_{r=0}^{r=n} a_r z^r \right\} d\varphi +$$
$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\delta}\left\{ S(\varphi,\gamma) - \sum_{r=0}^{r=n} a_r z^r \right\} d\varphi + \frac{1}{\pi}\int_{\pi-\delta}^{\pi}\left\{ S(\varphi,\gamma) - \sum_{r=0}^{r=n} a_r z^r \right\} d\varphi;$$

e nel caso che, qualunque sia n, i due ultimi integrali del 2° membro siano infinitesimi con δ, la (8) sarà ancor valida con la restrizione (9).

3. Nel caso della (2), si ha $a_n = 1$, $R = 1$, e la (7) è divergente sul cerchio di convergenza; ma

$$S(\varphi, \gamma) = \frac{1}{1 - \cos\gamma - i \operatorname{sen}\gamma \cos\varphi},$$

nell'ipotesi (9), è integrabile in $(0, \pi)$. Poi si ha p. es.

$$\int_0^{\delta}\left| S(\varphi, \gamma) - \sum_{r=0}^{r=n} z^r \right| d\varphi = \int_0^{\delta}\left| \frac{(\cos\gamma + i \operatorname{sen}\gamma\cos\varphi)^{n+1}}{1 - \cos\gamma - i \operatorname{sen}\gamma\cos\varphi} \right| d\varphi < \frac{\delta}{1 - \cos\gamma};$$

e quindi la (8) è applicabile con la condizione (9); e si ha

$$\sum_{n=0}^{\infty} X_n(\cos\gamma) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{d\varphi}{1-\cos\gamma - i\,\mathrm{sen}\,\gamma\cos\varphi} = \frac{1}{2\,\mathrm{sen}\,\frac{\gamma}{2}}.$$

4. Nel caso della (3), è

$$a_0 = a_1 = 0, \quad a_n = \frac{1}{n-1};$$

e la (7) diventa

$$z^2 + \frac{z^3}{2} + \dots + \frac{z^n}{n-1} + \dots = -z\log(1-z).$$

Il raggio R è eguale a 1, ma la serie converge sul cerchio di convergenza, eccettuato il punto $z=1$. Si ha poi:

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} S(\varphi,\gamma)d\varphi = -\frac{\cos\gamma}{\pi}\int_0^{\pi}\log(1-\cos\gamma - i\,\mathrm{sen}\,\gamma\cos\varphi)\,d\varphi -$$

$$-\frac{\mathrm{sen}^2\gamma}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\mathrm{sen}^2\varphi d\varphi}{1-\cos\gamma - i\,\mathrm{sen}\,\gamma\cos\varphi} =$$

$$= -\cos\gamma\log\left(\mathrm{sen}\,\frac{\gamma}{2} + \mathrm{sen}^2\frac{\gamma}{2}\right) - 2\left(\mathrm{sen}\,\frac{\gamma}{2} - \mathrm{sen}^2\frac{\gamma}{2}\right).$$

E quindi

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{X_n(\cos\gamma)}{n-1} = -\cos\gamma\log\left(\mathrm{sen}\,\frac{\gamma}{2} + \mathrm{sen}^2\frac{\gamma}{2}\right) - 2\left(\mathrm{sen}\,\frac{\gamma}{2} - \mathrm{sen}^2\frac{\gamma}{2}\right),$$

per tutti i valori di γ, eccettuati quelli della forma $2k\pi$, con k intero.

5. Quanto alla (1), si osservi che essa è la somma delle due serie $2\sum_{n=2}^{\infty} X_n(\cos\gamma)$ e $3\sum_{n=2}^{\infty}\frac{X_n(\cos\gamma)}{n-1}$; quindi

$$\sum_{r=2}^{\infty}\frac{2n+1}{n-1}X_n(\cos\gamma) = \frac{1}{\mathrm{sen}\,\frac{\gamma}{2}} - 4\cos^2\frac{\gamma}{2} - 6\left(\mathrm{sen}\,\frac{\gamma}{2} - \mathrm{sen}^2\frac{\gamma}{2}\right) -$$

$$-3\cos\gamma\log\left(\mathrm{sen}\,\frac{\gamma}{2} + \mathrm{sen}^2\frac{\gamma}{2}\right).$$

Palermo, aprile 1924.