
BOLLETTINO UNIONE MATEMATICA ITALIANA

PAOLO BONANNO

Sul secondo principio di reciprocità

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1,
Vol. **3** (1924), n.4, p. 150–154.

Unione Matematica Italiana

http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1924_1_3_4_150_0

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

Sul secondo principio di reciprocità.

Nota di PAOLO BONANNO

Il *secondo principio di reciprocità* nella forma esposta dal prof. COLONNETTI ⁽¹⁾, stabilisce una notevole relazione tra le caratteristiche delle sollecitazioni che si sviluppano attraverso una sezione qualsiasi, operata su un corpo elastico in equilibrio sotto l'azione di date forze esterne e le corrispondenti caratteristiche di una distorsione elastica, effettuata imprimendo uno spostamento rigido arbitrario, purchè piccolissimo, all'una faccia del taglio rispetto all'altra (distorsione di VOLTERRA ⁽²⁾).

⁽¹⁾ G. COLONNETTI: *Su di una reciprocità tra deformazioni e distorsioni*. « Rend. della Reale Accad. dei Lincei », vol. XXIX, serie 5^a, 1° semestre, 1915.

⁽²⁾ V. VOLTERRA: *Sur l'équilibre des corps élastiques multiplement connexes*. « Ann. École Normale », S. 3^a, tom. XXIV. Vedi anche « Rend. della Reale Accademia dei Lincei », anni 1905 e 1906; *Un teorema sulla teoria della elasticità; Sull'equilibrio dei corpi elastici più volte connessi; Sulle*

Ora è intuitivo pensare che detto principio di reciprocità si possa estendere anche al caso dei solidi in moto elastico o vibranti; e che, al pari di quanto avviene per l'equilibrio elastico, anche nel caso del moto, l'applicazione di questo principio debba essere feconda di notevoli risultati.

Tale estensione si può fare in modo semplice, osservando che in ogni istante, pel principio di d'ALEMBERT, deve sussistere equilibrio tra le forze esterne applicate al solido tagliato e le tensioni che si sviluppano nella sezione considerata, purchè si comprendano tra le forze esterne anche le forze d'inerzia.

Ma nessuna difficoltà si presenta a darne una dimostrazione diretta, ed ecco come.

Nello spazio V più volte connesso, limitato dalla superficie S ed occupato da un solido elastico, consideriamo tre funzioni u, v, w delle coordinate dei punti di V e del tempo t , regolari nello spazio V . Supponiamo inoltre che il valore di queste funzioni, in ogni punto, sia così piccolo da poter supporre che u, v, w rappresentino le componenti di uno spostamento elastico impresso al solido occupante lo spazio V .

Sieno allora X, Y, Z le componenti delle corrispondenti forze di massa, riferite all'unità di volume, ed L, M, N le corrispondenti tensioni superficiali, per unità d'area.

In un istante qualsiasi t , immaginiamo tracciate nel solido elastico dato n tagli arbitrari $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n$ che rendano V semplicemente connesso. Allo scopo di non alterare lo stato di equilibrio dinamico raggiunto dal solido, in moto elastico, nell'istante t che si considera, immaginiamo di applicare sulle due facce $\sigma_i, \bar{\sigma}_i$ di ciascuna superficie σ_i un sistema di tensioni $X_{\sigma_i}, Y_{\sigma_i}, Z_{\sigma_i}$, riferite all'unità d'area, equipollenti al sistema di tensioni che attraverso la faccia considerata, si trasmettevano nell'istante immediatamente prima che fosse avvenuto il taglio σ_i , con ν_i indicando la normale alla faccia considerata, rivolta positivamente verso l'interno di V ; talchè le analoghe componenti $X_{-\nu_i}, Y_{-\nu_i}, Z_{-\nu_i}$ delle tensioni che dovremo immaginare di applicare all'altra faccia $\bar{\sigma}_i$ del taglio, risulteranno rispettivamente uguali a $-X_{\sigma_i}, -Y_{\sigma_i}, -Z_{\sigma_i}$.

Nei riguardi del solido tagliato queste tensioni possono riguardarsi, nell'istante che si considera, come delle nuove forze superficiali.

distorsioni dei solidi elastici più volte connessi: Sulle distorsioni dei corpi elastici simmetrici; Contributo allo studio delle distorsioni dei solidi elastici; Sulle distorsioni generate da tagli uniformi; Nuovi studi sulle distorsioni dei solidi elastici.

Ciò posto, al solido dato, occupante ora lo spazio V' semplicemente connesso, ottenuto da V mediante gli n tagli, immaginiamo impressa una nuova deformazione elastica e sieno u', v', w' le componenti dello spostamento elastico che ne consegue, con u', v', w' funzioni delle coordinate x, y, z e del tempo t , anch'esse regolari nello spazio semplicemente connesso V' e limitato dal complesso di superficie S' .

Chiamando con X', Y', Z' le corrispondenti forze di massa e con L', M', N' le forze superficiali, distribuite su S' , il teorema di BETTI ⁽¹⁾ ci permette di scrivere:

$$\begin{aligned}
 & \int_V \left[\left(X - \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right) w' + \left(Y - \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \right) v' + \left(Z - \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right) w' \right] dV + \\
 & + \int_S (Lu' + Mv' + Nw') dS + \sum_1^n \int_{\sigma_i} (u'_{\sigma_i} X_{v_i} + v'_{\sigma_i} Y_{v_i} + w'_{\sigma_i} Z_{v_i}) d\sigma_i = \\
 (1) \quad & = \int_V \left[\left(X' - \rho \frac{\partial^2 u'}{\partial t^2} \right) u + \left(Y' - \rho \frac{\partial^2 v'}{\partial t^2} \right) v + \left(Z' - \rho \frac{\partial^2 w'}{\partial t^2} \right) w \right] dV + \\
 & + \int_{S'} (L'u + M'v + N'w) dS',
 \end{aligned}$$

nella quale ρ denota la densità del solido nel punto generico e $u'_{\sigma_i}, v'_{\sigma_i}, w'_{\sigma_i}$ rappresentano le discontinuità che subiscono le funzioni u', v', w' nell'attraversare le due facce α_i, β_i del taglio σ_i . Denotando con $u'_{\alpha_i}, v'_{\alpha_i}, w'_{\alpha_i}, u'_{\beta_i}, v'_{\beta_i}, w'_{\beta_i}$ i valori di u', v', w' su queste facce, si ha

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} u'_{\alpha_i} - u'_{\beta_i} = u'_{\sigma_i} \\ v'_{\alpha_i} - v'_{\beta_i} = v'_{\sigma_i} \\ w'_{\alpha_i} - w'_{\beta_i} = w'_{\sigma_i} \end{array} \right.$$

Se la deformazione ausiliaria, di cui u', v', w' rappresentano lo spostamento elastico, è una distorsione di SOMIGLIANA ⁽²⁾, cioè

⁽¹⁾ Il « Nuovo Cimento », (serie 2^a, anno 1872).

Vedi anche: CESARO E.: *Introduzione alla teoria matematica dell'elasticità*. Torino, 1894; MARCOLONGO R.: *Teoria matematica dell'equilibrio dei corpi elastici*. Milano, 1904; LOVE H.: *A treatise on the mathem. theory of elasticity*. Cambridge, 1906.

⁽²⁾ C. SOMIGLIANA: *Sulla teoria delle distorsioni elastiche*. « Rend. Reale Acc. dei Lincei », vol. XXIII, serie 5^a, 1° semestre, 1914; *Sulle deformazioni elastiche non regolari*. « Atti del IV Congresso Internaz. dei Matematici ». Roma, aprile 1908, vol. III, sezione III.

se supponiamo che le discontinuità u'_{σ_i} , v'_{σ_i} , w'_{σ_i} sieno funzioni qualsiasi delle sole coordinate dei punti di σ_i ; che sieno nulle tanto le forze di massa X' , Y' , Z' quanto le tensioni superficiali L' , M' , N' e che inoltre u' , v' , w' sieno indipendenti dal tempo, si vede che si annullano il primo ed il secondo integrale del secondo membro della (1), la quale diviene:

$$\begin{aligned} (1') \quad & \int_V \left[\left(X - \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right) u' + \left(Y - \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \right) v' + \left(Z - \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right) w' \right] dV + \\ & + \int_S (Lu' + Mv' + Nw') dS = \\ & = - \sum_1^n \int_{\sigma_i} (u'_{\sigma_i} X_{v_i} + v'_{\sigma_i} Y_{v_i} + w'_{\sigma_i} Z_{v_i}) d\sigma_i. \end{aligned}$$

Se gli spostamenti u' , v' , w' rappresentano invece una distorsione di VOLTERRA, allora è noto che le discontinuità (2) sono funzioni del tipo

$$u'_{\sigma_i} = l'_i + q'_i z - r'_i y$$

$$v'_{\sigma_i} = m'_i + r'_i x - p'_i z$$

$$w'_{\sigma_i} = n'_i + p'_i y - q'_i x$$

ove l'_i , m'_i , n'_i , p'_i , q'_i , r'_i sono costanti arbitrarie piccolissime, dell'ordine di grandezza degli spostamenti elastici u' , v' , w' .

Sostituendo in tal caso nella (1') questi valori di u'_{σ_i} , v'_{σ_i} , w'_{σ_i} e mettendo in evidenza le caratteristiche della distorsione si ha infine:

$$\begin{aligned} (3) \quad & \int_V \left[\left(X - \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right) u' + \left(Y - \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \right) v' + \left(Z - \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right) w' \right] dV + \\ & + \int_S (Lu' + Mv' + Nw') dS = \\ & = - \sum_1^n \left[l'_i \int_{\sigma_i} X_{v_i} d\sigma_i + m'_i \int_{\sigma_i} Y_{v_i} d\sigma_i + n'_i \int_{\sigma_i} Z_{v_i} d\sigma_i + p'_i \int_{\sigma_i} (Z_{v_i} y - Y_{v_i} z) d\sigma_i + \right. \\ & \quad \left. + q'_i \int_{\sigma_i} (X_{v_i} z - Z_{v_i} x) d\sigma_i + r'_i \int_{\sigma_i} (Y_{v_i} x - X_{v_i} y) d\sigma_i \right]. \end{aligned}$$

Osserviamo ora che i 6 integrali relativi a σ_i non sono altro che le 6 caratteristiche del sistema di tensioni che ivi si sviluppano nell'istante t , sotto l'azione del sistema di forze esterne (comprese le forze d'inerzia) agenti sul corpo elastico dato. Se supponiamo inoltre che le $6n$ caratteristiche della distorsione ope-

rata, in grazia dalla loro arbitrarietà, sieno tutte nulle, eccezion fatta per le caratteristiche d'indice i , relative al taglio σ_i , possiamo concludere dalla (3) che:

« In ogni istante, la somma dei prodotti delle 6 caratteristiche del sistema di tensioni interne che in un corpo elastico vibrante si sviluppano in corrispondenza di una data sezione, per le corrispondenti caratteristiche di una distorsione, è eguale e contraria al lavoro che le forze effettive (forze esterne date e forze d'inerzia) eseguirebbero nel cambiamento di configurazione a cui quella distorsione darebbe origine ».

In un prossimo mio scritto mi propongo di accennare a qualche importante applicazione alla dinamica elastica del secondo principio di reciprocità, testè enunciato.

Torino, marzo 1924.