Bollettino
Unione Matematica
Italiana

Giulio Supino

Sui teoremi del potenziale elastico

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **3** (1924), n.4, p. 145–150.

Unione Matematica Italiana

¡http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1924_1_3_4_145_0¿

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 1924.

PICCOLE NOTE

Sui teoremi del potenziale elastico.

Nota di GIULIO SUPINO

I teoremi fondamentali del potenziale elastico possono dedursi facilmente in modo diretto dal teorema di CLAPEYRON e dai due principi di variazione (¹).

Questi si scrivono nella forma:

$$(1) \qquad \delta_s(\Phi - 2Le) = 0$$

$$(2) \qquad \delta_f(\Phi - 2Le) = 0$$

dove δ_s e δ_f indicano rispettivamente se la variazione è presa rispetto ai soli spostamenti o alle sole forze; Le dà il lavoro di CLAPEYRON; Φ rappresenta l'energia potenziale elastica espressa nella (1) in funzione delle deformazioni e nella (2) in funzione delle tensioni.

Le (1) e (2) esprimono variazioni di carattere *virtuale*: lo stato a cui si giunge è possibile geometricamente, ma non dal punto di vista statico, perchè non vi è corrispondenza tra gli incrementi delle forze e degli spostamenti (cioè non si conserva la legge di HOOKE). Se però supponiamo — eseguita la variazione indicata dalla (1) (o dalla (2)) — di compensare l'eccesso degli spostamenti sulle forze (o viceversa) siamo condotti ad aggiungere delle quantità che al limite per $\delta_s \to 0$ (o $\delta_f \to 0$) divengono infinitesime di ordine superiore: più precisamente l'espressione

$$(3) \qquad \delta(\Phi - 2Le) = 0$$

(¹) Il primo principio non è che una forma del principio dei lavori virtuali e da questo si ottiene col teorema di CLAPEYRON. La forma (1) è data da H. LORENZ. Il 2° principio (che pure si ottiene facilmente dal teorema di CLAPEYRON) è stato enunciato dal DOMKE: *Ueber Variationsprizipien in der Elastizitätslehre* « Zeitschrift für Mathematik und Physik », 1914, e sotto la forma (2) si trova nelle lezioni di *Meccanica applicata alle Costruzioni* del prof. ALBENGA (litogr. 1919-1920 e anni seguenti) insieme alla deduzione del teorema del minimo lavoro di cui faremo uso in seguito.

dove ora δ rappresenta una variazione *effettiva* - e quindi contemporanea nelle forze e negli spostamenti — differisce al limite dalla (1) (o dalla (2)) per infinitesimi del 2° ordine. E poichè i nostri calcoli si limitano a quelli del primo ordine, possiamo applicare le formule (1) o (2) anche se le deduzioni si riferiscono a variazioni di carattere effettivo.

1. I principi ricordati valgono per una variazione completamente arbitraria degli spostamenti mentre quella relativa alle forze è soggetta alle condizioni di equilibrio. Comunque si potrà sempre supporre che essa interessi solo una porzione σ' della superficie limite del corpo. Allora dalla (1) si ha [1]

$$\delta\Phi = \int_{\sigma'} (P_x \delta u + P_y \delta v + P_z \delta w) d\sigma'$$

e quindi (per esempio)

$$\frac{\partial\Phi}{\partial u} = \int_{\sigma'} P_x d\sigma'.$$

Per l'arbitrarietà nella scelta degli assi si conclude:

« La derivata del lavoro di deformazione rispetto agli sposta-
« menti effettivi presi in una data direzione e su una porzione
« unitaria di superficie rappresenta la forza media agente sulla
« superficie stessa e nella direzione considerata ».

Con eguale procedimento si estende questo enunciato ad una porzione unitaria di volume; partendo poi dalla (2) e derivando rispetto alle forze si ottiene l'espressione degli spostamenti medii. Si hanno così le due parti del teorema di CASTIGLIANO [2].

2. Anche il teorema di BETTI può ottenersi facilmente confrontando le due seguenti espressioni del potenziale relative ad

(1) Mi servo delle notazioni usuali.

(2) La dimostrazione rigorosa di questo teorema per forze comunque ripartite si trova in L. DONATI: *Introduzione teorica alla Fisica Tecnica*, Bologna, 1901. Ricorrendo alla nozione di funzione di linea, Egli ottiene le forze effettive derivando rispetto a spostamenti medii; risultato in certo modo reciproco a quello esposto sopra. Volendo mantenersi su basi elementari, gli autori si limitano a cercare in un punto la derivata rispetto alle forze, ma mi sembra preferibile la soluzione approssimata cui qui si giunge perchè permette di dare tutte due le parti del teorema di CASTIGLIANO; mentre è facile ricondurci, nei casi in cui ciò abbia senso, allo studio della derivata in un punto passando al limite per $\sigma \to 0$.

uno stesso stato di equilibrio $E = E' + E''$

$$\Phi(E) = \frac{1}{2}\int_\sigma \{(P_x' + P_x'')(u' + u'') + (P_y' + P_y'')(v' + v'') + (P_z' + P_z'')(w' + w'')\}\, d\sigma +$$
$$+ \frac{1}{2}\int_\tau \{(F_x' + F_x'')(u' + u'') + (F_y' + F_y'')(v' + v'') + (F_z' + F_z'')(w' + w'')\}\, d\tau$$

e (si applica sempre il teorema di CLAPEYRON)

$$\Phi(E) = \frac{1}{2}\int_\sigma (P_x'u' + P_y'v' + P_z'w')d\sigma + \frac{1}{2}\int_\tau (F_x'u' + F_y'v' + F_z'w')d\tau +$$
$$+ \int_\sigma \left\{\left(P_x' + \frac{1}{2}P_x''\right)u'' + \left(P_y' + \frac{1}{2}P_y''\right)v'' + \left(P_z' + \frac{1}{2}P_z''\right)w''\right\} d\sigma +$$
$$+ \int_\tau \left\{\left(F_x' + \frac{1}{2}F_x''\right)u'' + \left(F_y' + \frac{1}{2}F_y''\right)v'' + \left(F_z' + \frac{1}{2}F_z''\right)w''\right\} d\tau.$$

Si ottiene subito la reciprocità nota tra gli stati E', E''.

3. Dalla (1) e (2) considerando quegli stati per cui è $\delta_f Le = \delta_s Le = 0$ si ha

$$\delta_f \Phi = 0, \tag{4}$$
$$\delta_s \Phi = 0. \tag{5}$$

Il significato di queste due formule si ricava inquadrando lo stato effettivo di deformazione con gli altri stati di deformazione non congruenti (cioè non soddisfacenti alle condizioni di SAINT VENANT) e lo stato di tensione equilibrato e possibile con quelli equilibrati ma non possibili (cioè non soddisfacenti alle equazioni del BELTRAMI).

Allora — per quanto la Φ rappresenti il lavoro di deformazione solo per lo stato congruente — si giunge all'enunciato:

« Il lavoro di deformazione è un minimo compatibilmente con le forze esterne date » dove il minimo è giustificato con la considerazione che la variazione totale (che qui coincide con la variazione seconda) è positiva.

Su questa interpretazione non è il caso di insistere dopo le ricerche di LUIGI DONATI [1]; ma è interessante mettere in rilievo

[1] Cfr. *Osservazioni sul teorema di Menabrea* « Memorie della R. Accad. delle Scienze di Bologna » (1888); *Ulteriori osservazioni sul teorema di Menabrea*, Ibid (1889); *Introduzione teorica alla Fisica tecnica*; cfr. anche G. COLONNETTI: *Il potenziale elastico dal punto di vista energetico* « Memorie della R. Accademia di Torino », 1912.

che le condizioni di congruenza ricavate con una ricerca di carattere puramente geometrico hanno anche un significato energetico; ciò che è tanto più notevole in quanto si può osservare che questo risultato non è legato strettamente alla legge di HOOKE, ma è valido anche per condizioni più larghe (per es. ammettendo la legge di BACH).

4. I teoremi precedenti danno luogo a metodi diversi (almeno nel linguaggio) per la risoluzione dei problemi di elasticità. Esporrò qui alcune considerazioni sulle applicazioni del teorema di MENABREA. Tenuto presente che di esso vale il reciproco [1], la condizione $\delta\Phi = 0$ può sostituire le condizioni di « coerenza », indicando con questo nome tanto la congruenza nel solido che la conservazione della compagine nel sistema. Quest' ultimo caso è il più interessante perchè la risoluzione del problema di variazione nel solido conduce alle stesse equazioni differenziali cui conducono le condizioni di SAINT VENANT (o di BELTRAMI), mentre, se si studiano sistemi dotati di una indeterminazione propria, oltre quella dovuta ai singoli solidi che li compongono, e se si suppone già ottenuta per questi la risoluzione generale, allora il teorema di MENABREA porta ad una reale semplificazione. Questa si rivela in particolare se la indeterminazione dipende da un numero finito di parametri (sistemi articolati, sistemi combinati). Notiamo però che, mentre nel solido gli stati non congruenti caratterizzano la classe di quelli tra cui va ricercata la soluzione di minimo senza che le forze esterne compiano lavoro, questa non è fissata nel sistema. Ciò che darà luogo a qualche osservazione.

Consideriamo per esempio i sistemi articolati.

Indicando con T_{rs} lo sforzo nell' asta s^{ma} se questa fa capo al nodo r e con α_{rs}, β_{rs}, γ_{rs} i suoi coseni direttori, le condizioni ai limiti sono

$$\left\{\begin{aligned} \sum_s T_{rs}\alpha_{rs} + P_{xr} &= 0 \\ \sum_s T_{rs}\beta_{rs} + P_{yr} &= 0 \\ \sum T_{rs}\gamma_{rs} + P_{zr} &= 0 \end{aligned}\right. \qquad r = 1 \dots n$$

e per la determinazione del minimo si dovrà porre (E mod. di

[1] Se è $\delta\Phi = \min$ sono soddisfatte le condizioni di coerenza. Cfr. L. DONATI: *Intr. teorica alla Fisica tecnica.* Il teorema, come risulta dalla dimostrazione, è soddisfatto semplicemente per $\delta\Phi = 0$.

elasticità, A area della sezione retta)

$$\Phi = \frac{1}{2}\sum_{r,s}\frac{T_{rs}^2}{E_{rs}A_{rs}} + \sum_r \lambda_r(\sum_s T_{rs}\alpha_{rs} + P_{x_r}) + \sum_r \mu_r(\sum_s T_{rs}\beta_{rs} + P_{y_r}) + $$
$$+ \sum_r \gamma_r(\sum T_{rs} + P_{z_r}) = \min.$$

Ma sfruttando la sovrapposizione degli effetti si può scrivere

$$T_{rs} = T_{rs}^0 + T_{rs}'X' + ... T_{rs}^{(m)}X^{(m)} \tag{6}$$

dove T_{rs}^0 rappresenta lo sforzo provocato nell'asta s^{ma} dalle forze esterne date, supposte uguali a zero le reazioni e le tensioni nei vincoli sovrabbondanti

$$X' \quad X'' .... X^{(m)},$$

e gli altri coefficienti si ottengono quando si suppongano rispettivamente le sole tensioni di montaggio

$$\begin{array}{lll} X' = 1 & X'' = 0 .... & X^{(m)} = 0 \\ X' = 0 & X'' = 1 .... & X^{(m)} = 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ X' = 0 & X'' = 0 .... & X^{(m)} = 0 \end{array} \tag{7}$$

Allora *se le forze esterne sono indipendenti dagli spostamenti elastici dei loro punti di applicazione*, sostituendo in Φ le espressioni (6) i coefficienti delle λ, μ, ν risultano identicamente nulli; siamo così ricondotti alla ricerca dell'estremo libero

$$\Phi = \frac{1}{2}\sum_{r,s}\frac{(T_{rs}^0 + T_{rs}'X' + ... T_{rs}X^{(m)})^2}{E_{rs}A_{rs}}$$

che si determina con

$$\frac{\partial\Phi}{\partial X_1} = 0 .... \frac{\partial\Phi}{\partial X^{(m)}} = 0. \tag{8}$$

Analogamente si procede per i sistemi combinati.

5. Le equazioni precedenti sono ottenute con una restrizione che si ritrova anche nei trattati di ingegneria con la condizione ivi posta che *le reazioni d'appoggio non compiano lavoro* [1].

[1] Cfr. per es. Guidi parte 2ª della *Scienza delle Costruzioni*. La condizione che non esistano sforzi indipendenti dai carichi è necessaria solo perchè nell'espressione di minimo non compaiano le tensioni di montaggio, ma non per ricavare dal teorema di Menabrea il minimo stesso.

Ma messa in questa forma si potrebbe pensare che essa sia implicita anche per gli altri teoremi di elasticità e dipenda dall' uso continuo del principio dei lavori virtuali: invece, poichè nel solido elastico le forze si equilibrano punto per punto, il principio in realtà non viene sfruttato e sotto il suo nome non si applica altro che uno dei postulati della statica. Si comprende quindi che, conoscendo la legge per cui le forze dipendono dalla deformazione del solido, sarà ugualmente possibile in questo caso di risolvere il problema; ma, espressa la sollecitazione generica di un'asta del sistema sotto la forma (6), le equazioni ai limiti non sono più identicamente soddisfatte e nelle espressioni di Φ come nelle equazioni (8) compariranno certe funzioni delle forze esterne.

Poichè il principio di minimo si è posto fra quelle deformazioni caratterizzate dall'esser nullo il lavoro delle forze esterne, si comprende come le equazioni ricavate in questo modo siano apparse come conseguenza di uno dei principi di variazione e non del teorema di minimo; invece i due principi fisici si riuniscono sotto una sola operazione analitica dandole maggior rilievo; circostanza questa che mi sembra messa in evidenza anche dalle dimostrazioni esposte.

Bologna, marzo 1924.