Bollettino
Unione Matematica
Italiana

Enrico Bompiani

Contributi alla geometria proiettivo-differenziale di una superficie

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **3** (1924), n.3, p. 97–100.

Unione Matematica Italiana

¡http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1924_1_3_3_97_0¿

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 1924.

PICCOLE NOTE

Contributi alla geometria proiettivo-differenziale di una superficie.

Nota di E. BOMPIANI (*)

§ III. *Le quadriche di Moutard.* — **11.** Le coniche osculatrici alle sezioni di una superficie σ con i piani passanti per una tangente in P appartengono, secondo un risultato di MOUTARD, ad una quadrica [10]. L'equazione della quadrica di MOUTARD relativa alla tangente $T=0$, $N_1+nN_2=0$ è

$$(14)\quad \left\{\begin{aligned} &[4(\beta+\gamma n^3)^2+3n(\beta_u+4\beta_v n+4\gamma_u n^3+\gamma_v n^4)]T^2+\\ &+3\beta n^3\left(N_1N_2-\Omega T+\frac{1}{2}\frac{\partial^2\log\beta\gamma}{\partial u\partial v}T^2\right)+\\ &+24n(2\gamma n^3-\beta)\left(N_1+\frac{1}{2}\frac{\partial\log\beta\gamma}{\partial u}T\right)T+\\ &+24n^2(\gamma n^3-2\beta)\left(N_2-\frac{1}{2}\frac{\partial\log\beta\gamma}{\partial v}T\right)T=0.\end{aligned}\right.$$

Questa e la quadrica di LIE relativa a P hanno in comune, oltre alle tangenti asintotiche in P, una conica passante per P; *proprietà caratteristica delle tangenti di Darboux è di coincidere con la tangente (in* P *a* σ*) alla conica residua intersezione della quadrica di Moutard relativa ad una di esse con la quadrica di Lie* [11].

(*) Continuazione, v. anno III, n. 2, p. 49.

[10] Questa quadrica è stata rimessa in luce dal CECH; si veda p. es. la sua Memoria citata: *L' intorno di un punto etc.* ove se ne trova l'equazione in coordinate normali di WILCZYNSKI; qui, per mantenere la normalizzazione di FUBINI, si è scritta l'equazione (14) che è trasformata della (7) di CECH.

[11] Avendo comunicato questo risultato al CECH, nel maggio 1923, mi informò essergli sostanzialmente noto.

12. Si consideri ora in P l'involuzione cubica delle tangenti avente le asintotiche per rette triple: le sue terne di rette si ottengono, al variare di μ, dall'equazione $\mu\beta + \gamma u^3 = 0$ (per $\mu = 1, -1$ si hanno le tangenti di DARBOUX e di SEGRE).

Le tre quadriche di MOUTARD relative alle tre rette formanti una terna dell'involuzione s'incontrano (all'infuori delle tangenti asintotiche) in un punto la cui congiungente con P ha per equazioni

$$(15)\quad \begin{cases} 4\left(4N_1 - \dfrac{\partial \log \beta^2\gamma^3}{\partial u} T\right)\mu + \left(8N_1 - \dfrac{\partial \log \beta^3\gamma^4}{\partial u} T\right) = 0 \\[2ex] \left(8N_2 + \dfrac{\partial \log \beta^4\gamma^3}{\partial v} T\right)\mu + 4\left(\dfrac{\partial \log \beta^3\gamma^2}{\partial v} T + 4N_2\right) = 0: \end{cases}$$

si può assumere questa retta come rappresentante la terna di tangenti da cui siamo partiti (o il punto comune alle tre quadriche di MOUTARD). Il luogo di queste rette è il cono quadrico

$$(16)\quad \begin{cases} 3\cdot 64 N_1N_2 + 8\left(\dfrac{\partial \log \beta^4\gamma^3}{\partial v} - 8\dfrac{\partial \log \beta^3\gamma^2}{\partial v}\right)N_1 T + \\[2ex] + 8\left(\dfrac{\partial \log \beta^3\gamma^4}{\partial u} - 8\dfrac{\partial \log \beta^2\gamma^3}{\partial u}\right)N_2 T \\[2ex] + \left(\dfrac{\partial \log \beta^4\gamma^3}{\partial v}\dfrac{\partial \log \beta^3\gamma^4}{\partial u} - 16\dfrac{\partial \log \beta^3\gamma^2}{\partial v}\dfrac{\partial \log \beta^2\gamma^3}{\partial u}\right)T^2 = 0. \end{cases}$$

Questo cono è invariante per applicabilità proiettive (che sia invariante risulta dalla stessa costruzione geometrica, essendo tali e l'involuzione considerata e le quadriche di MOUTARD). Sicchè:

Ad ogni punto P di σ è collegato in modo invariante (per applicabilità proiettive) un cono quadrico le cui generatrici corrispondono biunivocamente alle terne di rette dell'involuzione cubica sopra definita (e si ottengono congiungendo P con il punto residua intersezione delle quadriche di Moutard relative alle tre rette).

Il piano contenente l'ulteriore intersezione (tolte le tangenti asintotiche) di questo cono con la quadrica di LIE è pure legato invariantemente (per appl. proiett. al punto P di σ.

Ogni particolarità di questo cono, o della corrispondenza fra le sue generatrici e le terne dell'involuzione, mette in evidenza particolarità invariantive della superficie. Occupiamoci di due casi.

13. Supponiamo che il cono (16) si spezzi. Annullando il discriminante della (16) si ha, dopo opportune riduzioni, $\dfrac{\partial \log \beta^2\gamma}{\partial v}\dfrac{\partial \log \beta\gamma^2}{\partial u} = 0$, cioè $h_1h_2 = 0$ quindi otteniamo una nuova proprietà caratteristica delle superficie studiate nei n.[i] 7, 9, 10. Possiamo precisare ancora quando accade che $h_1 = 0$ e $h_2 = 0$. In tal caso il cono (16) si spezza nei due piani normali passanti per le tangenti asintotiche. Viceversa, affinchè ciò accada deve essere

$$(17) \qquad \frac{\partial \log \beta^4\gamma^3}{\partial v} = 8\,\frac{\partial \log \beta^3\gamma^2}{\partial v}, \quad \frac{\partial \log \beta^3\gamma^4}{\partial u} = 8\,\frac{\partial \log \beta^2\gamma^3}{\partial u}, \quad \frac{\partial \log \beta^3\gamma^2}{\partial v}\,\frac{\partial \log \beta^2\gamma^3}{\partial u} = 0$$

e da queste, se p. es. è $h_1 = 0$, risultano β e γ funzioni della sola v. Se, come si può, si altera il parametro v in modo da avere $\beta\gamma = \text{cost.}$, dalla prima delle (17) risulta $\beta = \text{cost.}$, quindi anche γ e perciò $h_2 = 0$. Quindi:

Condizione necessaria e sufficiente affinchè il cono quadrico (16) si spezzi è che le linee canoniche su σ coincidano con un sistema di linee asintotiche o siano indeterminate: quest'ultimo fatto si presenta allora e solo quando il cono si spezza nei due piani passanti per le tangenti asintotiche e per la normale proiettiva.

14. La (15) fa corrispondere alle due tangenti asintotiche due rette ben determinate (per $\mu = 0$, $\mu = \infty$): i piani normali che le contengono hanno per equazioni

$$(18) \qquad \frac{\partial \log \beta^3\gamma^4}{\partial u} N_2 + 2\,\frac{\partial \log \beta^3\gamma^2}{\partial v} N_1 = 0, \qquad 2\,\frac{\partial \log \beta^2\gamma^3}{\partial u} N_2 + \frac{\partial \log \beta^4\gamma^3}{\partial v} N_1 = 0.$$

Ci domandiamo quando accade che le due rette appartengono al piano canonico, di equazione $h_1 N_2 + h_2 N_1 = 0$. Paragonando i coefficienti delle (18) con h_1 e h_2 si ha

$$(19) \qquad \begin{cases} h_1 \dfrac{\partial \log \gamma}{\partial v} + 2h_2 \dfrac{\partial \log \gamma}{\partial u} = 0 \\[2ex] 2h_1 \dfrac{\partial \log \beta}{\partial v} + h_2 \dfrac{\partial \log \beta}{\partial u} = 0 \end{cases}$$

e da queste risulta $h_1 = h_2 = 0$ (cioè la superficie è a linee canoniche indeterminate) a meno che sia

$$(20) \qquad \frac{\partial \log \beta}{\partial u}\,\frac{\partial \log \gamma}{\partial v} - 4\,\frac{\partial \log \beta}{\partial v}\,\frac{\partial \log \gamma}{\partial u} = 0.$$

Sommando questa alle due (19) si ha

$$\frac{\partial \log \beta}{\partial u}\frac{\partial \log \beta}{\partial v} = \frac{\partial \log \gamma}{\partial u}\frac{\partial \log \gamma}{\partial v} = 0;$$

e se p. es. $\frac{\partial \beta}{\partial u} = 0$ per soddisfare all' ultima equazione e alla (20) occorre e basta che sia $\frac{\partial \gamma}{\partial u} = 0$ (oppure $\frac{\partial \beta}{\partial v} = \frac{\partial \gamma}{\partial v} = 0$; ma questa soluzione è un caso particolare della precedente), cioè β e γ sono funzioni di uno solo dei due parametri u, v (se sono funzioni della sola v è $h_1 = 0$ e le due rette considerate si trovano nel piano normale $N_1 = 0$ passante per la tangente asintotica alla linea u, $dv = 0$, piano che fa parte del cono (16) in questo caso). Queste superficie, come ha rilevato FUBINI [12], ammettono un gruppo ad un parametro. Concludendo:

Le superficie caratterizzate dal fatto che le due generatrici del cono quadrico (16) *corrispondenti alle tangenti asintotiche si trovano nel piano canonico sono quelle a linee canoniche indeterminate (nel qual caso quelle due generatrici coincidono con la normale proiettiva); oppure quelle per cui le linee canoniche coincidono con un sistema di asintotiche e le due generatrici si trovano nel piano normale passante per la tangente asintotica che è canonica; in questo caso β e γ sono funzioni di un solo parametro.*

Lerici, estate 1923.

(12) G. FUBINI: *Fondamenti di geometria proiettivo-differenziale* (Rendic. Circ. Matem. di Palermo, t. XLIII, 1918-19), § 8 A) I. α).