UMI

Recensioni

* Lezioni di Analisi infinitesimale del prof. Picone
* G. Julia, Leçons sur les functions uniformes à point singulier esséntiel isolé
* Luigi Amoroso, Studio tecnico per l'ordinamento delle pensioni al personale del Banco di Napoli.
* S. Pincherle, Gli elementi della teoria delle funzioni analitiche.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **3** (1924), n.3, p. 128–139.

Unione Matematica Italiana

¡http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1924_1_3_3_128_0¿

RECENSIONI

Lezioni di Analisi infinitesimale del prof. Picone. (« Circolo Matematico di Catania », 1923, vol. 1°, parte 1ª e 2ª).

Il nuovo libro di Analisi infinitesimale del prof. M. Picone dovrebbe essere seguito da un secondo volume contenente lo svolgimento di quei più elevati Capitoli dell'Analisi, che più di frequente si presentano allo studioso non solo di matematica, ma anche delle sue applicazioni alla fisica. Ma anche da solo il primo volume del nuovo trattato ci dà un'ampia ed esauriente trattazione di quei Capitoli dell'Analisi che costituiscono gli ordinari corsi di Calcolo infinitesimale.

Come avverte lo stesso autore nella prefazione, vi sono molte novità di trattazione. Così la definizione di limite, assumendo a punto di partenza la nozione di insiemi *ordinati* di operazioni, include, tra l'altro, quella nozione di limite che si presenta nel calcolo integrale quando si pensa un integrale come *limite* di certe somme: somme provenienti da operazioni le quali, p. es., nel caso di funzioni definite in un intervallo, si ordinano semplicemente chiamando seguenti di un'operazione O tutte le operazioni O corrispondenti a suddivisioni dell'intervallo in parti, la cui massima è minore della massima di quelle che hanno servito nell'operazione O (1).

Fin dal principio si definiscono il massimo e il minimo limite e si parla del limite di quantità complesse, dimostrando il teorema di Cauchy-Hadamard per la serie di potenze. Segue poi la teoria degli insiemi di punti svolta con generalità maggiore della solita, definendo tra l'altro, fin dal principio, gli insiemi continui, i dominî, ciò che permette di dare la massima generalità al concetto di funzione (corrispondenza univoca in un verso) tra gli insiemi di due classi A, B, in due spazi distinti.

Per le funzioni numeriche di punto, cioè per le ordinarie funzioni si definiscono gli estremi e l'oscillazione della funzione anche in ogni punto del campo di esistenza, la semicontinuità e

(1) Questo ultimo concetto si trova già nelle *Lezioni di Calcolo infinitesimale* di S. Pincherle (Bologna, Zanichelli, 2ª ed., p. 308). (*N. d. R.*)

la continuità. Per le funzioni di una variabile si definiscono i numeri derivati e le derivate e si danno i teoremi fondamentali relativi. Interessante è lo studio accurato, anche per il calcolatore numerico, dell'approssimazione col metodo delle secanti e con quello di NEWTON-FOURIER delle radici di una data equazione.

Nel Capitolo destinato alle funzioni di due o più variabili, è notevole che, a differenza del solito, qui si estendano a tali funzioni tutti i teoremi fondamentali relativi alle funzioni di una sola variabile; dal teorema di LAGRANGE per la derivata mista e dal teorema di ROLLE, dal teorema della media di CAUCHY e da quello di l'HOSPITAL all'esame accurato del concetto di differenziale, all'enunciazione precisa delle condizioni sufficienti perchè una funzione di più variabile sia indipendente da una di queste, allo studio del gradiente e così via.

Nè si trascura l'estensione al campo complesso, enunciando perfino le condizioni di monogeneità, di cui si dànno le prime applicazioni. Il seguente Capitolo è dedicato alla teoria delle serie uniformemente convergenti e loro proprietà fondamentali, a qualche cenno della teoria delle serie multiple, e infine al teorema di esistenza delle funzioni implicite dimostrato col metodo delle successive approssimazioni. Notevoli l'enunciato del corrispondente teorema di unicità, l'enunciato dedicato ad estendere il campo in cui le funzioni implicite risultano definite e notevolissimi i teoremi in cui si applicano i risultati ottenuti al problema generale delle funzioni inverse: quando, essendo le r variabili y funzioni delle r variabili x in un certo campo, si possono viceversa considerare le x come funzioni delle y?

Nel Capitolo dedicato al cambiamento di variabili non si trascura di porre in rilievo i parametri differenziali Δ_1 e Δ_2; nella teoria dei massimi e minimi non si trascura di esporre l'idea fondamentale a cui si inspira il metodo dei minimi quadrati.

La seconda parte del libro è dedicata specialmente al calcolo integrale. Essa comincia con un *lemma fondamentale* di grande generalità destinato a poter esporre poi nel modo più rapido i passaggi al limite necessarî per la definizione diretta degli integrali: si prevede così che tutta la esposizione sarà improntata alla massima generalità con metodo nuovo e originale. La prima applicazione è fatta alla definizione dell'estensione di un insieme e alla sua misura (secondo JORDAN), a cui, dopo alcuni suggestivi esempi, seguono subito le definizioni e le prime proprietà del minimo o massimo integrale e delle funzioni integrabili.

Notevole e nuova è l'interpretazione del massimo e del minimo integrale come massimo e minimo limite di una variabile ordinata; si hanno così immediatamente le proprietà fondamentali di quegli integrali come particolarissimo caso della generale teoria dei limiti svolta fin dalle prime pagine dell'opera.

Restano contemporaneamente studiati gli integrali definiti e quelli di campo: la riduzione di questi al calcolo successivo di più integrali definiti è svolta con la massima ampiezza. Con grande generalità è studiato pure il problema del limite degli integrali; di cui si svolgono le applicazioni fondamentali (integrazione per serie, derivabilità di un integrale definito). Ma il metodo diventa completamente nuovo, e si ottengono i risultati più notevoli nelle pagine destinate agli integrali improprii: gli stessi teoremi di esistenza di tali integrali enunciati dal PICONE sono, a quanto io so, completamente originali, come pure appaiono nuovi i teoremi relativi al limite di questi integrali. Questi paragrafi e le applicazioni alla teoria del potenziale costituiscono certo una delle parti più brillanti del nuovo trattato.

Si studiano poi con grande generalità le funzioni di dominio, e specialmente tra esse le funzioni additive: il confronto con l'esposizione che il DE LA VALLÉE POUSSIN dà, servendosi dell'integrale del LEBESGUE, della teoria delle funzioni additive d'insieme, può dimostrare quanta generalità abbia saputo conseguire il PICONE, pure restando nell'ambito dell'integrazione riemanniana, e con quanta semplicità abbia saputo dedurne il teorema generale sul cambiamento di variabili d'integrazione per gli integrali a quante si vogliano dimensioni. Per le funzioni di dominio si estendono i varii teoremi della media e il teorema di l'HOSPITAL.

Per gli integrali definiti si danno i teoremi della media prima di passare al problema delle funzioni primitive, che viene studiato nel caso più generale possibile per chi non voglia usare l'integrale del LEBESGUE. Con gran cura si studiano i varii procedimenti classici per il calcolo degli integrali indefiniti, e definiti, esaminando particolarmente tutto quanto riguarda sia gli integrali improprii, sia il calcolo numerico effettivo. Tra gli esempi più notevoli ricorderò la funzione Γ, i polinomi di LEGENDRE, ecc. Gli integrali curvilinei sono studiati insieme al problema della rettificabilità delle curve. Gli integrali nel piano sono studiati, estendendo ad essi i teoremi della media, e i teoremi già svolti per le funzioni di una sola variabile; si dà la formula di GREEN, con applicazione alle funzioni armoniche, e al cambiamento di variabili degli integrali multipli, che viene studiato con estrema generalità. Si esaminano sia i metodi di calcolo numerico, che la teoria degli integrali estesi ai pezzi di superficie, evitando senz'altro tutte le questioni relative alla definizione di area di una superficie sghemba; la definizione data dall'A. si trova più avanti concorde con quella di MINKOWSKI. Le ultime pagine sono dedicate ai teoremi di GREEN e di STOKES, alle funzioni armoniche, e alle applicazioni geometriche.

Questa rapida scorsa dimostra già con quanta generalità ed ampiezza siano svolti tutti i Capitoli fondamentali del calcolo, con quanto amore si sia dato ad ogni questione lo sviluppo più esauriente possibile, e come metodi assai spesso nuovi e fecondi diano al libro un carattere affatto originale.

Questo libro sarà un'ottima guida per coloro che desiderano avviarsi allo studio della teoria delle funzioni di variabile reale, sia per la grande generalità con cui sono svolti i principali Capitoli, sia perchè vi si trovano svolte anche molte teorie che di solito sono trascurate nelle opere congeneri.

GUIDO FUBINI

G. JULIA. *Leçons sur les fonctions uniformes à point singulier essentiel isolé* di pag. VII-149. Paris, Gauthier-Villars, 1924.

In questo volumetto, che fa parte dell'importante ed ormai ricca collezione di monografie sulla teoria delle funzioni, diretta da E. BOREL, il JULIA raccoglie i più importanti risultati a cui hanno portato in questi ultimi anni gli studi sul comportamento di una funzione intorno a un suo punto singolare essenziale, in ispecie quelli che riguardano il teorema classico di PICARD. Molti di questi risultati, in buona parte frutto delle ricerche originali dell'A., furono ottenuti coll'aiuto della teoria delle famiglie normali di funzioni analitiche: agli altri, già noti prima dell'introduzione del concetto di famiglia normale, questo concetto geniale introdotto nei primi anni dello scorso decennio dal MONTEL, che ne ha svolto la teoria e mostrata l'importanza, portò un contributo insigne sia semplificandone la dimostrazione, sia permettendo di estenderli e di approfondirli.

Il metodo delle famiglie normali si è mostrato veramente geniale ed utile, perchè per quanto è semplice e piano altrettanto è fecondo di interessanti risultati; per esso, come s'è detto, non solo si potè giungere a delle dimostrazioni estremamente semplici ed eleganti di molti importantissimi teoremi, basti ricordare quelli di PICARD, LANDAU, SCHOTTKY, LINDELÖF, ma si giunse pure a risultati nuovi e molto notevoli.

Notiamo che con l'utilità della teoria delle famiglie normali viene sempre meglio messa in luce l'importanza della funzione modulare, sul cui concetto è basata questa teoria.

Consideriamo ora più da vicino la nuova opera del JULIA.

Nel primo Capitolo riassume alcune proprietà delle funzioni uniformi riguardanti i punti singolari, poli ed essenziali isolati, dà poi alcune nozioni sulla rappresentazione conforme, fermandosi specialmente sul principio della simmetria di SCHWARZ, che dà il prolungamento analitico di una funzione rappresentante conformemente un campo Δ limitato da archi di curve analitiche, sul semipiano superiore, attraverso un arco di cerchio (in particolare di retta) appartenente al contorno di Δ. Da ultimo parla della funzione modulare $z = \lambda(t)$ e della sua inversa $= t(z)$, dando in modo molto piano ed evidente il perchè della rete di quadrilateri mistilinei della variabile t e della corrispondente superficie di RIEMANN per la variabile z e mostrando come si genera il sottogruppo del gruppo modulare che dà tutte le determinazioni di $v\ z)$, e definisce poi la funzione $w = \dfrac{t - a}{t - \bar{a}} = \dfrac{\nu(z) - \nu(a_0)}{\nu(z) - \overline{\nu(a_0)}} = \omega(z)$ e la sua inversa $z = (w) = \left(\dfrac{w \cdot \overline{\nu(a_0)} - \nu(a_0)}{w - 1}\right)$, che danno la funzione modulare nel cerchio di raggio unitario.

Nel secondo capitolo l'A. si serve direttamente delle quattro funzioni definite alla fine del precedente capitolo per giungere alla dimostrazione dei teoremi di PICARD, LANDAU, CARATHÉODORY e SCHOTTKY, mostrando così la grande importanza della funzione modulare nella teoria delle funzioni analitiche.

Il terzo capitolo tratta della teoria delle famiglie normali di funzioni uniformi, più particolarmente intere e meromorfe. Per introdurre il concetto di famiglia normale mostra come lo studio del comportamento di una funzione uniforme $f(x)$ intorno a un punto singolare essenziale isolato si può riportare a quello di una famiglia $f_1(x)$, $f_2(x)$ .... $f_n(x)$ .... di funzioni pure uniformi, dove $f_n(x) = f(\sigma^n x)$, essendo $|\sigma| < 1$, se il punto singolare lo si suppone all'origine. L'A. passa quindi rapidamente in rivista le tappe segnate dallo studio della convergenza delle successioni di funzioni olomorfe, dal classico teorema di WEIERSTRASS a quello di LANDAU e CARATHÉODORY dato nel 1911 e che costituisce, sebbene solo per un caso particolare, la proposizione fondamentale della teoria delle famiglie normali, cioè che una famiglia di funzioni che non prendono tre valori distinti, finiti o infiniti, è una famiglia normale; vale a dire tale che da ogni successione di funzioni della famiglia se ne può estrarre un'altra convergente uniformemente.

Condotto da questi studi il MONTEL pubblicò nel 1912 la sua nota memoria, ampliata poi da quella del 1916 (« Ann. de l' Ec. Norm. Sup. »), nelle quali tratta organicamente la teoria delle famiglie normali, fissandone il concetto e le proprietà e mostrandone l'utilità nella dimostrazione dei teoremi trattati al precedente capitolo, la quale diviene oltremodo semplice ed elegante, prestandosi anche a estenderli convenientemente.

L'A. in questo capitolo riassume ed illustra questi risultati e lo stesso fa pure nel seguente, dove dopo aver trattato delle curve che tendono al punto singolare essenziale isolato, di quelle che lo circondano e dei valori asintotici, viene a dare i teoremi di LINDELÖF e della sua scuola sull'indeterminazione di una funzione intorno al punto singolare, seguendo prima la via indicata dal loro scopritore, poi col metodo delle famiglie normali, accennando, come ha fatto il MONTEL, alle estensioni, che questo metodo permette di dare a quei teoremi.

Nei tre ultimi capitoli l'A. riassume i risultati da lui ottenuti nelle tre memorie « Sur quelques propriétés nouvelles des fonctions entières ou méromorphes » (Ann. de l' Ec. Norm. Sup., 1919, '20 e '21), di cui un sunto dato dall'autore stesso si trova in questo Periodico a pag. 63 del fascicolo n. 2 (aprile 1923); risultati che ottenuti col metodo delle famiglie normali sono molto interessanti perchè mostrano come si possa effettuare l'approssimazione asintotica simultanea delle radici di $f(x) - a = 0$, per ogni valore di a diverso dagli eccezionali seguendo i tre metodi di approssimazione del punto singolare essenziale isolato: metodo continuo, mediante curve, la cui forma è molto arbitraria ed è data a priori; metodo discontinuo regolare, mediante punti posti in progressione geometrica, o in progressione aritmetica; dando luogo in questo secondo caso a conclusioni che sono molto meno generali che coi metodi precedenti, ma che, ove si possono trarre sono molto più precise, avendosi un'approssimazione vera e propria e non asintotica delle radici; in fine il metodo discontinuo non regolare; mediante punti posti in successione qualsiasi.

Specialmente il primo metodo è molto interessante, perchè dà una ragione molto semplice e visiva della proprietà di molte funzioni di avere delle curve privilegiate, cioè delle curve C tali che in ogni settore limitato da curve simili alle C e d'apertura comunque piccola, purchè contenente al suo interno una delle C, la funzione prende un' infinità di volte tutti valori finiti o infiniti tranne due al più; proprietà alla quale si può giungere con ragionamento semplice ma forse meno perspicace partendo dai teoremi di LINDELÖF e IVERSEN.

Come lavoro didattico questo libro si presenta molto bene perchè raccoglie molti interessanti risultati degli studi moderni sulle funzioni uniformi a punto singolare essenziale isolato e li porge in forma piana, semplice ed elegante, in modo da renderli accessibili alle menti dei giovani che vogliono procurarsi nuove cognizioni che potranno loro dare possibilità di proseguire; donde l'utilità di questo libro appare manifesta. (*l.*)

LUIGI AMOROSO: *Studio tecnico per l'ordinamento delle pensioni al personale del Banco di Napoli.* Napoli, Tip. Raimondi. 1924.

Il concetto fondamentale cui si ispira il presente Studio sta nella costituzione di un Fondo autonomo, che assicuri al personale un conveniente trattamento di quiescenza, ed al tempo stesso consolidi l'onere che il Banco sostiene per pensioni, in una cifra non superiore a quella che il Banco sostiene attualmente.

Nei riguardi del trattamento di pensione assicurato, sono considerate le tre ipotesi seguenti:

I) Trattamento analogo a quello assicurato agli impiegati dello Stato, prima della riforma del novembre u. s. E cioè pensione pari, per ogni anno di servizio utile, ad un quarantesimo dello stipendio medio dell'intiero triennio sulle prime quattromila lire, più un cinquantesimo sulla rimanente somma.

II) Trattamento analogo a quello assicurato *al personale* della Banca d'Italia. E cioè pensione pari per ogni anno di servizio utile, ad un quarantesimo dello stipendio medio dell'ultimo triennio.

III) Trattamento analogo a quello assicurato agli impiegati dello Stato, in base alla riforma del novembre u. s. Quindi pensione pari, per ogni anno di servizio utile, ad un quarantesimo dello stipendio medio dell'ultimo triennio, più un sessantesimo sulla rimanente somma.

La pensione massima si raggiunge dopo quarant'anni di servizio ed è pari nell'ipotesi III ad *otto decimi* dello stipendio; nella ipotesi I a *nove decimi*; nell'ipotesi II *all'intero stipendio.*

Nessun altro limite superiore è imposto; l'ipotesi III è supposto invece che gli stipendi possano essere aumentati in proporzione non superiore al 45 per cento.

La aliquota complessiva, necessaria ad assicurare l'equilibrio finanziario del Fondo, e nella quale si comprende quella del 6 per cento che resta a carico del personale, è pari

nell'ipotesi	I al 20,37	degli	stipendi	attuali
»	II al 24,06		»	»
»	III al 20,75		»	aumentati,

rispetto agli attuali, in misura non superiore al 45 per cento.

Il carico totale annuale per il Banco, compreso l'onere per le pensioni oggi esistenti, resterebbe *consolidato*.

Nell'ipotesi	I	L. 2.839.677
»	II	» 3.312.088
»	III	» 3.738.071.

La spesa che il Banco sostiene per le pensioni *oggi esistenti aumentata dalla quota sugli utili*, quale fu versata in media, nell'ultimo quinquennio, al Fondo per le pensioni pure oggi esistente, ammonta, in cifra tonda, a *quattro milioni*.

In ciascuna delle tre ipotesi, I, II, III, l'onere verrebbe quindi consolidato in una cifra inferiore a quella che corrisponde al carico attuale.

S. PINCHERLE. — *Gli elementi della teoria delle funzioni analitiche*. Bologna, N. Zanichelli, 1922 [1].

Nel Cap. XV, in cui sono seguiti il metodo e le notazioni di WEIERSTRASS, si comincia col far vedere che $\Sigma' \frac{1}{w^\alpha}$ ove w rappresenta genericamente $2m\omega + 2m'\omega'$ e la somma è estesa a tutte le coppie di interi positivi e negativi m, m', escluso lo zero, è convergente assolutamente per $\alpha > 2$. Viene definita la funzione σ che ha per radici semplici tutti i punti w, $\sigma = x\Pi'\left(1 - \frac{x}{w}\right)e^{\frac{x}{w} + \frac{x^2}{2w^2}}$; la funzione $\zeta(x)$, derivata logaritmica della σ e la funzione $\wp(x)$ derivata, di segno cambiato, della $\zeta(x)$. La $\wp(x)$ è funzione ellittica, coi periodi elementari 2ω, $2\omega'$ del secondo ordine, con poli di secondo ordine in $x = 0$ e in tutti i punti w; la $\wp'(x)$ è funzione ellittica di terzo ordine ed ha tre radici nei punti congrui a ω, ω', $\omega + \omega'$. È stabilita la relazione $\wp'^2(x) = 4\wp^3(x) - g_2\wp(x) - g_3$ ove $g_2 = 60\Sigma' \frac{1}{w^4}$, $g = 140\Sigma' \frac{1}{w^6}$ (invarianti). Le radici di $R(\wp) = 4\wp^3(x) - g_2\wp(x) - g_3$, sono $e_1 = \wp(\omega)$, $e_2 = \wp(\omega')$, $e_3 = \wp(\omega + \omega')$.

Si costruisce, mediante la σ, una funzione ellittica che abbia le r radici α_h e gli r poli β_h. Ogni funzione ellittica pari, di pe-

[1] Continuazione, v. anno III, n. 2, p. 80.

riodi 2ω, $2\omega'$ si esprime in funzione razionale delle $\wp(x)$ omoperiodiche; ogni funzione ellittica, di periodi 2ω, $2\omega'$ si esprime in funzione razionale della $\wp(x)$ omoperiodica e di $\wp'(x)$. Una funzione ellittica che abbia come poli semplici β_1, β_2,.... β_r si può esprimere (HERMITE) nella forma $\sum_1^r A_k\zeta(x-\beta_k)+C$, con C costante e $\Sigma A_k=0$, e la formula si estende al caso dei poli multipli.

Gli integrali ellittici di prima, seconda, terza specie, ponendo la loro variabile d'integrazione eguale a $\wp(x)$ si riducono rispettivamente a x, $-\zeta(x)$, $\int\frac{dx}{\wp(x)-\alpha}$.

Sono stabilite due formule di addizione per la $\wp(x)$ e si dimostra che ogni funzione ellittica ammette un teorema di addizione (cioè passa una relazione algebrica fra $f(x)$, $f(y)$, $f(x+y)$); viceversa ogni funzione analitica uniforme che ammette un teorema di addizione e che non sia o razionale o funzione razionale di una esponenziale, è funzione ellittica; è mostrato come $\wp(nx)$ con n intero si possa esprimere razionalmente per $\wp(x)$ e come $\wp(kx)$ con k non intero non possa esprimersi razionalmente $\wp(x)$ se non è k complesso.

Indicando con ω_1, ω_2, ω_3 i semiperiodi ω, ω', $-(\omega+\omega')$ e con η_1, η_2, η_3 i semiperiodi secondari η, η', $-(\eta+\eta')$, si introducono le funzioni $\sigma_h=-e^{\eta_h x}\frac{\sigma(x-\omega_h)}{\sigma(\omega_h)}$ $(k=1, 2, 3)$ e se ne studiano le principali proprietà, indi le funzioni di JACOBI *seno amplitudine, coseno amplitudine, delta amplitudine,* delle quali si determinano i periodi elementari, gli zeri, i poli; definito il modulo k delle precedenti funzioni, si dimostrano le formule: $\mathrm{sn}^2 u+\mathrm{cn}^2 u=1$; $k^2\,\mathrm{sn}^2 u+\delta\mathrm{n}^2 u=1$; $\frac{d}{du}\mathrm{sn}\,u=\mathrm{cn}\,u\cdot\delta\mathrm{n}\,u$; $\frac{d}{du}\mathrm{cn}\,u=-\mathrm{sn}\,u\cdot\delta\mathrm{n}\,u$; $\frac{d}{du}\delta\mathrm{n}\,u=-k^2\,\mathrm{sn}\,u\cdot\mathrm{cn}\,u$; ponendo $\mathrm{sn}\,u=z$, ne scende $u=\int_0^z\frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}$.

Il Cap. XVI è dedicato alle funzioni generatrici e determinanti. Sia $\varphi(t)$ una funzione della variabile reale t definita da c a $+\infty$, limitata ed integrabile in ogni tratto finito di quell'intervallo; se, essendo x una variabile complessa, l'integrale $f(x)=\int_c^\infty\varphi(t)e^{-tx}dt$ è convergente, definisce una funzione $f(x)$ che dicesi funzione determinante di $\varphi(t)$, mentre $\varphi(t)$ si dice funzione generatrice di $f(x)$.

Indicando con $R(x)$ la parte reale del numero x, si dimostra che se per $x = x_0$ l'integrale è convergente, lo è pure per ogni x tale che sia $R(x) > R(x_0)$. Ascissa di convergenza di $f(x)$, od ordine della $\varphi(t)$, è il numero reale α tale che per $R(x) > \alpha$ l'integrale converge e per $R(x) < \alpha$ non converge; semipiano di convergenza di $f(x)$ è il semipiano $R(x) > \alpha$. In ogni area T limitata interna al semipiano di convergenza l'integrale $f(x, u) = \int_0^u \varphi(t) e^{-tx} dt$ converge uniformemente a $f(x)$. È dimostrato il teorema (LANDAU): se λ è il limite massimo del modulo di $\frac{1}{u} \log \int_c^u \varphi(t) dt$, l'ascissa di convergenza non è maggiore di λ e se $\alpha \geq 0$ è $\alpha = \lambda$.

Sia $\varphi(t)$ funzione analitica regolare in $x = 0$, $\varphi(t) = \sum_0^\infty \frac{a_n t^n}{n!}$, se per $R(x) > \alpha$ è $\lim_{n=\infty} \frac{1}{x^n} \int_0^\infty \varphi^{(n)}(t) e^{-tx} dt = 0$, la $f(x)$ è esprimibile mediante la serie $\sum_0^\infty \frac{a_n}{x^{n+1}}$ fuori del cerchio $|x| = \alpha$. Se la serie $\sum_0^\infty \frac{a_n}{x^{n+1}}$ non è convergente essa rappresenta *assintoticamente* la $f(x)$, cioè esiste per ogni m un numero positivo ξ_m tale che per $R(x) > \xi_m$, la differenza $f(x) - \sum_0^m \frac{a_n}{x^{n+1}}$ è infinitesima per $x = \infty$ d'ordine superiore ad $m + 1$. Se $\varphi(t)$ è indefinitamente derivabile con derivate limitate, integrabili, di ordine finito non superiore ad α in ogni intervallo finito $(0, a)$ e di più per $R(x) > \alpha$

$$\text{(A)} \qquad \lim_{n=\infty} \frac{1}{x(x+1) \dots (x+n)} \int_0^\infty \varphi_{n+1} e^{-t(x+n+1)} dt = 0$$

la $f(x)$ è rappresentabile colla serie di fattoriali $\sum_0^\infty \frac{b_n}{x(x+1) \dots (x+n)}$, ove $\varphi_1(t) = \varphi'(t) e^t$, $\varphi_2(t) = \varphi'_1(t) e^t$, ... $\varphi_n = \varphi'_{n-1} e^t$, ... e $b_h = \varphi_h(0)$; qualora non sia verificata la condizione (A), la serie di fattoriali rappresenta assintoticamente la $f(x)$. Seguono alcune proposizioni sulle serie di fattoriali, fra cui ricordiamo che ogni funzione analitica regolare per $x = \infty$ è sviluppabile in serie di fattoriali.

Si dimostra che se $f(x)$ è un ramo di funzione analitica monodromo regolare nel semipiano $R(x) > \alpha$, se esiste un reale c tale che $f(x) e^{cx}$, al tendere di x a ∞ secondo direzioni comprese fra

$-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}$ (incluse), tende a zero di un ordine numericamente positivo, allora per $R(x) > k > \alpha$

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_c^{\infty} e^{-tx}\int_{ki-\infty}^{k+i\infty} f(u)e^{tu}du dt,$$

la quale formula esprime la generatrice mediante la funzione determinante

$$\varphi(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{k-i\infty}^{k+i\infty} f(u)e^{tu}du.$$

Nel Cap. XVII sono studiate le funzioni ipergeometriche. Si comincia col mostrare come l'integrale generale di una equazione $g'' = p(x)g' + q(x)g$ ove p, q sono funzioni analitiche, è regolare, per x finito, ove lo sono le funzioni $p(x)$ e $q(x)$. I punti singolari di $p(x)$ e $q(x)$ si dicono punti singolari dell'equazione differenziale. Si prende allora in esame l'equazione ipergeometrica (o di GAUSS) $x(1-x)y'' - [(\alpha+\beta+1)x - \gamma]y' - \alpha\beta y = 0$, i cui punti singolari sono $0, 1, \infty$. Nell'intorno di $x=0$ si hanno i due integrali

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+n-1)\beta(\beta+1)\ldots(\beta+n-1)}{n!\gamma(\gamma+1)\ldots(\gamma+n-1)} x^n,$$

serie ipergeometrica che GAUSS rappresenta con $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$, e $v = x^{1-\gamma}F(\alpha-\gamma+1, \beta-\gamma+1, \alpha-\gamma, x)$. Escludendo per α, β, γ valori interi, u e v formano un sistema fondamentale di integrali, il quale per un giro in senso positivo intorno a $x=0$ subisce la sostituzione $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{-2\pi i\gamma}\end{pmatrix}$.

Sono dati analogamente i sistemi fondamentali nell'intorno di $x=1$ e di $x=\infty$, ed è poi determinato il gruppo dell'equazione ipergeometrica, gruppo che resta inalterato se α, β, γ si aumentano di numeri interi. Se in tre equazioni ipergeometriche i parametri α (o β, o γ) differiscono fra loro per interi, fra tre loro integrali qualsivogliano passa una relazione lineare omogenea a coefficienti razionali. Agli integrali dell'equazione ipergeometrica si dà il nome di funzione ipergeometriche.

Usando della trasformazione di EULER $f(x) = \int_{(l)} \varphi(t)(t-x)^{\sigma-1}dt$ si perviene a dimostrare che l'equazione ipergeometrica ammette come integrale $y = c\int_{(l)} t^{\alpha-\gamma}(t-1)^{\gamma-\beta-1}(t-x)^{-\alpha}dt$, ove (l) deve essere una conveniente linea; si fa vedere come si possano costruire due di tali linee in guisa che i corrispondenti integrali siano linearmente indipendenti.

Se 2ω, $2\omega'$ sono i periodi della funzione ellittica inversa della funzione $\int\limits_{t_0}^{t} \frac{dt}{\sqrt{t(t-1)(t-x)}}$, il rapporto $\omega : \omega'$ è una funzione analitica $\tau(x)$ di x regolare in tutto il piano ad eccezione dei punti $x=0$, $x=1$, $x=\infty$, multiforme. Facendo uso delle proprietà della funzione $\tau(x)$ si dimostra col PICARD che ogni funzione intera che non assuma per valori finiti di x due dati valori si riduce a costante.

Infine, il Cap. XVIII è dedicato alle funzioni euleriane. È studiato l'integrale euleriano di prima specie o funzione Beta $B(x, y) = \int\limits_0^1 (1-u)^{y-1}u^{x-1}du$, che per ogni y (o x) differente da zero o da un intero negativo è funzione meromorfa di x (o di y) con poli di primo ordine nei punti $x=0, 1, 2, \ldots n, \ldots$ (o $y=0, 1, 2, \ldots n, \ldots$). Mostrato come una soluzione particolare dell'equazione alle differenze $(x+1)f(x+1)=f(x)$ è la funzione $F(x)=\prod\limits_1^{\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-x}$ si introduce la funzione $\Gamma(x)=1 : F(x-1)$ detta con LEGENDRE funzione gamma, funzione meroforma coi poli di primo ordine $0, -1, -2, \ldots$ e di essa si danno diverse espressioni e si stabiliscono numerose proprietà e fra altro formule che permettono di dedurre il valore di $\Gamma(x)$ per ogni x reale, conosciuti i valori di $\Gamma(x)$ nell'intervallo $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right)$. Sono poi studiate le due funzioni $\psi(x)$ derivata logaritmica di $\Gamma(x)$ e $\chi(x)$ derivata della $\psi(x)$.

L'integrale euleriano di seconda specie $\Gamma(x) = \int\limits_0^{\infty} e^{-t}t^{x-1}dt$ rappresenta nel semipiano $R(x) > 0$ un ramo monodromo di funzione analitica; studiate alcune sue proprietà è fatto vedere che coincide con la funzione $\Gamma(x)$.

È infine stabilita la relazione fra gli integrali euleriani di prima e seconda specie $B(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$ e si determinano delle espressioni assintotiche per $\Gamma(x)$ e $\log \Gamma(x)$.

F. SIBIRANI