Sunti di lavori esteri

* Lavori di: F. Ritt, G. Guichard, J. Drach, B. Gambier, N. Sakerillabion, R. Jacques, A. Sainte Lague, A. Errerà, E. O. Lovett, Schouten e Struik, B. Gambier, G. Fano , A. Bloch, B. Hostinsky, G. Bratu, M. Van der Corput, S. Bays, W. Sierpinski, P. Fatou, S. Bernstein, C. Lévy, Spy. Sarantopoulos, B. Meidell, M. Lécat, G. Julia, F. Ritt, . Rémoundos , P. Dienes, T. Wazewski, T. Carleman, E. Borel, M. Ålander, S. Stoilow, C.Kuratowski, Th. Anghelutza, G. V. Pfeiffer, P. Appell, V. Saltykow, M. Juvet, E. Gau, Er. Kogbetliantz, A. Angelesco, S. Millot, B. Delaunay, M.Fréchet, S. Lefschetz, G. Valiron, P. Noaillon, G. Bouligand, E. Picard, E. Lebesgue, G.Boutjgand

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **3** (1924), n.3, p. 115–127.

Unione Matematica Italiana

¡http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1924_1_3_3_115_0¿

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 1924.

SUNTI DI LAVORI ESTERI

F. RITT. Sunto dei suoi lavori sulla *composizione delle funzioni razionali* (1).

Sia $R(z)$ una funzione razionale, a un punto in cui $a = R(a)$. Sia $m = R'(a)$. POINCARÉ ha mostrato (2) che se è $|m| > 1$, vi è una funzione meromorfa $f(z)$ tale che $f(mz) = R(f(z))$. Queste funzioni di POINCARÉ sono molto usate nella teoria dell'iterazione delle funzioni razionali, argomento studiato in questi ultimi anni da FATOU, JULIA, LATTES, PINCHERLE e da me stesso.

Le funzioni e^z, $\cos z$, la $\wp(z)$ di WEIERSTRASS sono funzioni di POINCARÉ, e le funzioni $R(z)$ che si presentano nei loro teoremi di moltiplicazione danno esempi molto istruttivi nella teoria dell'iterazione.

I lavori cui si riferisce questo mio sunto trattano tutti di questioni più o meno attinenti alle funzioni periodiche di POINCARÉ.

Nella I è fatta una determinazione completa delle funzioni periodiche sopra citate; in aggiunta a queste, si hanno essenzialmente la $\wp^2(z)$ per il caso lemniscatico $(g_3 = 0)$, e $\wp'(z)$ e $\wp^3(z)$ per il caso equianarmonico $(g_2 = 0)$.

È facile vedere che se una funzione di POINCARÉ ha due teoremi di moltiplicazione

$$f(m_1 z) = R_1(f(z)), \quad f(m_2 z) = R_2(f(z)),$$

si ha $R_1(R_2(z)) = R_2(R_1(z))$. Ciò suggerisce il problema della determinazione delle coppie di funzioni razionali permutabili rispetto

(1) Questi lavori sono cinque, cioè: I. *Periodic functions with a multiplication theorem.* « Transactions of the Americ Math. Society », T. 23, 1923. — II. *Permutable rational functions.* Ibid., T. 25, 1923. — III. *Prime and composite polynomials.* Ibid., T. 25, 1922. — IV. *Equivalent rational substitutions* (sarà pubblicato fra breve nello stesso giornale). — V. *On algebraic functions wich can be expressed in terms of radicals.* Ibid., T. 24, 1922.

(2) *Sur une classe nouvelle de trascendantes uniformes.* « Journal de Mathématiques », T. 55, 1890.

alla sostituzione, problema di cui si sono recentemente occupati JULIA [1] e FATOU [2]. Nella II, i cui risultati vanno sensibilmente oltre a quelli ottenuti dagli Autori citati, dimostro che se l'iterata di una delle funzioni permutabili non è identica ad una iterata dell'altra, le due funzioni provengono dal teorema di moltiplicazione di una funzione *periodica* di POINCARÉ. Alcuni risultati sono dati per il caso in cui vi sia una iterata comune; in particolare, è trattato completamente il caso in cui le due funzioni sono polinomî.

Il problema della permutabilità si generalizza come segue. Una funzione $R(z)$ razionale non lineare dicesi *composta* o *prima*, secondo che esistono, o no, due funzioni non lineari $\varphi_1(z)$, $\varphi_2(z)$ tali che sia $R(z) = \varphi_1(\varphi_2(z))$. Omettendo z e le parentesi, sia

(1) $$R = \varphi_1 \varphi_2 \dots \varphi_r,$$

dove ogni φ_i è una funzione razionale *prima*, ed è sostituita al posto di z nella funzione che la precede. Si può ricercare il grado e l'unicità della composizione (1). In III, tale questione è risoluta per i polinomî: è mostrato che due scomposizioni distinte contengono un ugual numero di polinomî, i gradi essendo, in una decomposizione, una permutazione dei gradi nell'altra, e che una scomposizione si può ottenere dall'altra mediante successivi scambi sia di polinomî trigonometrici, sia di una r^{sima} potenza di z e di un polinomio $z^m g(z^r)$.

Nella IV, che tratta un caso speciale della medesima questione per funzioni razionali fratte, viene discussa la relazione $\varphi(\alpha(z)) = \varphi(\beta(z))$, e sembra che le funzioni poliedrali abbiano una parte importante in codesto problema.

È noto che le funzioni razionali che si presentano nei teoremi di moltiplicazioni delle funzioni periodiche hanno funzioni inverse esprimibili per radicali. Ciò suggerisce la questione di determinare esplicitamente quelle relazioni algebriche che si possono risolvere mediante radicali. Nonostante il perfetto sviluppo della teoria di GALOIS da un lato, e di quella delle funzioni algebriche dall'altro, non sono stato capace di trovare, nella letteratura relativa, un'opera contenente l'enumerazione, in forma esplicita, di quelle relazioni algebriche che si possono esprimere per radicali. Nella Nota V, viene mostrato come le sole funzioni razionali le cui inverse si esprimono per radicali sono quelle che

[1] *Mémoire sur la permutabilité des fonctions rationelles.* « Annales de l'École Normale supérieure », 1922.

[2] « Journal de Mathématiques », 1923.

provengono dalle formule di moltiplicazione e dalle formule di trasformazione dei periodi in funzioni periodiche. È pure mostrato che se un polinomio di grado composto s'inverte per radicali, ogni φ_i prima nella sua scomposizione (1) è di quarto grado, nel quale caso è arbitraria, oppure si ottiene per trasformazione lineare da una potenza di z o da un polinomio trigonometrico. Sono pure ottenuti alcuni risultati relativi a funzioni algebriche sopra superficie riemanniane di genere maggiore di zero.

(Dall' Autore)

Note di *Geometria* comparse nei *C. R.* dal 23 aprile al 31 dicembre 1923.

Geometria infinitesimale. — C. Guichard (*Comptes Rendus de l'Académie des Sciences.* Paris, T. 176, pag. 808, pag. 1109, pag. 1353 e pag. 1587; T. 177. pag. 1177).

Nelle prime due Note, giovandosi della corrispondenza tra rette e sfere che nasce dalla teoria delle coordinate pentasferiche del Darboux, deduce costruzioni e proprietà di certi sistemi triplamente indeterminati di sfere, cerchi, ecc.

Nella terza osserva che i sistemi tripli ortogonali del Bianchi e i loro trasformati di Combescure sono associati a certi sistemi O da lui precedentemente considerati; ne trae delle proprietà di questi sistemi, che poi applica alla determinazione di due sistemi tripli ortogonali tali che nei punti corrispondenti le prime tangenti siano polari reciproche rispetto a una sfera.

Nella quarta Nota determina coppie di sistemi tripli ortogonali le cui prime tangenti siano polari reciproche rispetto a un complesso lineare, e ne deduce altri sistemi tripli ortogonali.

Nella quinta Nota osserva che le tangenti asintotiche uscenti da un punto A di una superficie S incontrano un piano fisso Π in punti P, Q che sono fuochi della congruenza piana C generata dalla retta PQ, variando A su S; poi dimostra che congruenze così generabili sono soltanto quelle che corrispondono per ortogonalità a una congruenza piana di Ribaucour. Indi prova che tutte le superficie S che dànno origine a una stessa congruenza C si deducono da una sola con omologie aventi Π come piano direttore; questo risultato permette, come prova l'A. con vari esempi, di risolvere semplicemente moltissimi problemi.

— — J. Drach (*Ibid.*, T. 176, pag. 1591).

Considera certi tipi di congruenze di rette che sono nel contempo di Weingarten e di Ribaucour, e ritorna su quelle (già considerate da U. SBRANA e VAULOT) la cui superficie media è un piano.

Geometria infinitesimale. — B. GAMBIER (*Ibid.*, T. 176, pag. 1594 e pag. 1785; T. 177, pag. 20).

Nella prima Nota dà un esempio semplice di una curva di BERTRAND algebrica che è immaginaria, *ma coincidente con la coniugata*, e che perciò fornisce (in modo noto) una superficie minima algebrica e *reale* che taglia una sfera sotto un angolo costante.

Nelle rimanenti Note, applicando la *trasformazione asintotica* delle curve (del BIANCHI, e da lui considerata in *Ibid.*, T. 176, pag. 27 e pag. 1594), deduce varie generazioni delle curve minime, di quelle a torsione costante e di quelle di BERTRAND; esse lo conducono a nuovi risultati sulla teoria delle trasformazioni delle quadriche, per es.: è possibile dedurre razionalmente da ogni superficie rigata applicabile sull'iperboloide rotondo una seconda superficie analoga (e quattro rigate applicabili sul catenoide); è possibile dedurre da ogni superficie rigata applicabile sul paraboloide rotondo una serie ∞^1 di superficie reali analoghe, e con due sole quadrature.

— — N. SAKERILLARION (*Ibid.*, T. 177, pag. 385).

Rammenta una sua formula generale atta a dare l'espressione di molti elementi geometrici di una curva di una superficie (*Ibid.*, T. 170, pag. 446) e mostra che essa dà pure l'espressione, trovata da WHITTEMORE, della *curvatura geodetica totale* (introdotta da OSGOOD per una curva sferica col nome di *bending*).

— — R. JACQUES (*Ibid.*, T. 177, pag. 579).

Perviene alla trasformazione di BÄCKLUND, partendo dalla considerazione dei reticolati le cui tangenti appartengono ad un complesso lineare. *g. s.*

Topologia. — A. SAINTE LAGUË (*Ibid.*, T. 176, pag. 1202).

Espone le principali proprietà (da lui trovate precedentemente) degli insiemi di punti, di un piano o dello spazio, di cui alcuni son congiunti da cammini (quando si prescinda dalla forma di questi).

— — A. ERRERA (*Ibid.*, T. 177, pag. 489).

Considera in un piano due sistemi A_λ ($\lambda = 0, 1, ..., u$), B_μ ($\mu = 0, 1, ..., v$) di punti e dimostra che $2u + 2v - h$ è il massimo numero di cammini coi quali si possono congiungere un A_λ e un B_μ e tali che due di essi si incontrino al più in una delle loro estremità. *g. s.*

Geometria analitica. — E. O. LOVETT (*Ibid.*, T. 177, pag. 931).

Determina le superficie rappresentate parametricamente

$$z = z_1(u, v), \quad y = z_2(u, v), \quad z = z_3(u, v)$$

tali che, essendo P_j, P_k, P_l, tre suoi punti qualunque fra gli $n+1$ punti P_i ($i = 0, 1, \ldots, n$) corrispondenti ai valori $u + ih$, $v + ih$ di u, v, il piano $P_jP_kP_l$ passi per l' origine delle coordinate qualunque siano u, v e h. *g. s.*

Geometria superiore. — SCHOUTEN e STRUIK (*Ibid.*, T. 176, pag. 1597).

Dànno un teorema generale sulle trasformazioni conformi delle varietà V_n a n dimensioni e ne deducono l'esistenza di trasformazioni che fanno corrispondere ad una V_m un' altra minimale, ad una V_m geodetica un' altra a punti ombelicali, ad una congruenza di curve qualunque un' altra di asintotiche. *g. s.*

Geometria. — B. GAMBIER (*Ibid.*, T. 176, pag. 1287).

Continuando le sue precedenti ricerche (*Ibid.*, T. 175, 26 decembre 1922) sui ***sistemi di punti sovrabbondanti*** per un dato grado in un piano, espone un ***criterio generale di sovrabbondanza*** ed alcune proprietà dei sistemi sovrabbondanti, che poi applica allo studio delle superficie di ordine cinque (sette) ammettenti una cubica gobba come linea doppia (tripla).

— — G. FANO (*Ibid.*, T. 176, pag. 1086).

Ritrova i teoremi di D' OCAGNE sulle normali di una quadrica lungo una linea di curvatura (*Ibid.*, T. 176, pag. 1032), deducendoli da proprietà della congruenza delle normali di una quadrica.

— — A. BLOCH (*Ibid.*, T. 177, pag. 731 e pag. 859).

HADAMARD ha dimostrato che esistono due cerchi Γ, Γ' che tagliano ciascuno di due cerchi dati (in piani qualunque) C, C' in due punti e ad angolo retto; ma COOLIDGE ha osservato che esistono particolari coppie di cerchi C, C' per le quali Γ, Γ' risultano indeterminati. Nella prima Nota l'A. espone nuove proprietà di tali coppie C, C' o di congruenze formate con esse; ed introduce il concetto di ***potenza ridotta*** di un punto rispetto a un cerchio, sulla quale enuncia varii teoremi. (HADAMARD ne rileva un altro in un commento alla Nota).

Nella seconda Nota espone dei risultati sulla rappresentazione sferica delle dette congruenze (che poi interpreta in geometria non euclidea), sulle trasformazioni conformi dello spazio, sulle superficie cerchiate tagliantesi ad angolo costante lungo un cerchio, sulle ciclidi di DUPIN.

Geometria. — B. HOSTINSKY (*Ibid.*, T. 177, pag. 1269).

Fa osservare che un certo problema di minimo collegantesi alla riflessione della luce emanata da un punto A sopra una superficie liscia S può ricondursi all'altro: trovare il luogo di un fuoco di un ellissoide rotondo che tocchi S in due punti e abbia l'altro fuoco in A. Poi risolve questo problema nel caso che S sia una quadrica. *g. s.*

Note di *Analisi* comparsi nei Tomi 174-176 dei *C. R. (continuazione).*

Calcolo delle probabilità. — G. BRATU (T. 175, pag. 562).

Indicando con progressioni per differenza d'ordine p tutte le successioni u_n soddisfacenti alla condizione $\Delta_{p+1}u_n = 0$, studia importanti proprietà di queste progressioni. *g. b.*

Teoria dei numeri. — M. VAN DER CORPUT (*Ibid.*, pag. 856).

Mostra un nuovo metodo per l'approssimazione delle somme ed applica per calcolare approssimativamente il numero dei punti a coordinate intere in campi a due dimensioni ottenendo valutazioni più precise dei metodi conosciuti di VORONOÏ, PFEIFFER, LANDAU, PILTZ e VAN DER CORPUT stesso.

— — S. BAYS (*Ibid.*, pag. 936).

Proseguendo le sue ricerche [1] sui sistemi tripli di STEINER enuncia dei risultati generali valevoli sul caso di $N = 6p + 1$ primo. *g. b.*

Teoria degli insiemi. — W. SIERPINSKI (*Ibid.*, pag. 859).

Stabilisce direttamente il primo teorema d'esistenza degli insiemi misurabili (B) di tutte le classi, ispirandosi ad una costru-

[1] *C. R.*, T. 165, pag. 542; T. 171, pag. 1263.

zione data da SOUSLIN e LUSIN [1], anzichè farlo dipendere dall'esistenza di tutte le classi di BAIRE [2]. *g. b.*

Funzioni di variabile complessa. — P. FATOU (*Ibid.*, pag. 862; pag. 1030).

Nella prima nota considera la sostituzione birazionale

$$X = R(x, y), \quad Y = S(x, y)$$

possedente due punti doppi O ed O' avente ciascuno una coppia di moltiplicatori maggiori di 1 e sia k e k' questa coppia per 0. Considera le funzioni meromorfe di PICARD $\theta_1(u, v)$, $\theta_2(u, v)$ tali che

$$\theta_1(ku, k'v) = R(\theta_1, \theta_2).$$
$$\theta_2(ku, k'v) = S(\theta_1, \theta_2).$$

La coppia θ_1, θ_2 non prende mai i valori appartenenti ad un certo intorno di O'.

Nella seconda nota fa delle applicazioni, considerando la sostituzione

$$x = y, \quad y = x\alpha(y) + \beta(y),$$

essendo α e β polinomi a coefficienti indeterminati.

— — S. BERNSTEIN (*Ibid.*, pag. 804).

Nelle sue ricerche [3] sul valore asintotico della migliore approssimazione delle funzioni analitiche si era limitato a calcolare il primo termine dello sviluppo, in questa nota mostra come si possono calcolare i termini successivi di questo sviluppo.

— — P. LÉVY (*Ibid.*, pag. 854).

Estende la formula di FOURIER

$$2\pi i f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-itz}\varphi(x)dz$$

al caso generale e studia la continuità della corrispondenza fra le funzioni $F(x)$ e $\varphi(x)$ essendo $F(x)$ la funzione uguale alla proba-

[1] Fund. Math., T. 5.

[2] Ved. LEBESGUE (Journ. Math., 6^a s., t. 1); C. DE LA VALLÉE-POUSSIN. *Intégrale de Lebesgue*, etc.... ; (Paris, 1916, pag. 145); HAHN, *Theorie der reellen Funktionen* (1821, pag. 374).

[3] Bull. Acc. Belg., 1913; C. R. T. 158 (1914), pag. 467.

bilità perchè la variabile x sia nell' intervallo $(-\infty, x)$ e risultando $F(x)$ dalla integrazione della sua derivata $f(x)$.

Funzioni di variabile complessa. — SPY. SARANTOPOULOS (*Ibid.*, pag. 1033).

Sostituisce condizioni più generali perchè due funzioni $F(x)$ e $\varphi(x)$ olomorfe all' interno d' una curva C e su C abbiano lo stesso numero di radici interne a C. *g. b.*

Calcolo delle probabilità. — B. MEIDELL (*C. R.*, T. 174, pag. 806; *C. R.*, T. 175, pag. 280).

Sostituisce, nella prima nota, all' enunciato del teorema di TCHEBYCHEFF un enunciato praticamente più applicabile. Nella seconda estende i risultati precedenti. *g. b.*

Algebra. — M. LÉCAT (*C. R.*, T. 175, pag. 1185; *C. R.*, T. 176, pag. 557; *C. R. T.* 176, pag. 972).

Nella prima nota tratta dello sviluppo di determinanti di classe e d' ordine generali in funzione di determinanti a spazi assiali vuoti.

Nella seconda dà una soluzione generale sulla espressione di un determinante a più dimensioni a mezzo delle sue sezioni (1).

Nella terza estende una proposizione di FROBENIUS (2) ai determinanti a più dimensioni. *g. b.*

Funzioni di variabile complessa. — G. JULIA (*C. R.*, T. 175, pag. 1188; *C. R. T.* 176, pag. 58).

Nella prima nota, essendo S una sostituzione a due variabili $S(x, y \mid X, Y)$ avente un punto doppio ripulsivo, determina le funzioni $f_1(x, y)$ tali che $f(x, y) = \lambda f_1(x, y)$.

Applica poi alla determinazione di tutte le famiglie di ∞ curve analitiche scambiantesi mutualmente per la sostituzione S e fa altre importanti applicazioni.

Nella seconda nota tratta le proprietà generali della iterazione delle sostituzioni razionali a due variabili $S(x_1 y \mid X_1 Y)$ in relazione alle proprietà, che si estendono o no, della iterazione delle sostituzioni ad una variabile.

(1) Vedi H. W. LLOYD TANNER. (Proc., London, Math. Soc. 1ª s. T. 8 (1878-79), pag. 167).

(2) FROBENIUS. *Ueber die Elementartheiler der Determinanten* (Sitz. Ak. Wiss., Berlin (1894), pag. 31).

Funzioni di variabile complessa. — F. RITT (*C. R.*, T. 176, pag. 60).

Mostra che ha considerato da molto tempo un problema più generale di quello studiato da JULIA sulla permutabilità delle funzioni razionali (¹).

— — G. RÉMOUNDOS (*C. R.*, T. 176, pag. 274).

Estende i risultati di JULIA sull' iterazione alle funzioni multiformi. *g. b.*

Teoria degli insiemi. — P. DIENES (*C. R.*, T. 176, pag. 67).

Chiama una successione trasfinita S non numerabile e tale che ciascun termine di S è preceduto da una successione f numerabile successione *transdénombrable*; C si chiama punto limite di S se vi è in S dopo un termine qualsiasi, un termine appartenente a $C-\varepsilon$, $C+\varepsilon$, e dimostra alcune proprietà di queste successioni.

— — T. WAZEWSKI (*C. R.*, T. 176, pag. 69).

Enuncia alcuni teoremi in conseguenza alla nozione di insiemi limiti ristretti e completi d' una successione infinita di insiemi numerabili (²). *g. b.*

Funzioni di variabili complesse. — T. CARLEMAN (*C. R.*, T. 176, pag. 64).

Essendo $f(x)$ una funzione non analitica che possiede una successione illimitata di derivate tali che

$|f^{(\nu)}(x)| < k\alpha^{\nu}$ (la succ. α_n essendo di num. positivi e crescenti)

dà un procedimento mediante il quale conoscendo $f^{(\nu)}(0)$ costruisce $f(x)$ (se esiste) ed ottiene

$$f(x) = \lim_{n=\infty} \sum_{0}^{n} a_{\nu}^{(n)} \frac{f^{(\nu)}(0)}{\nu} x^{\nu}.$$

Applica ad un prolungamento quasi-analitico.

(¹) Ved. *Prime and composite polynomials* (Trans. of the Am. Math. Society, 1922); JULIA, Annales Éc. Norm., 1922.

(²) Ved. C. DE LA VALLÉ-POUSSIN, *Intégrale de Lebesgue*, pag. 9.

Funzioni di variabili complesse. — E. BOREL (*Ibid.*, pag. 66).

Mostra l'importanza del risultato precedente che porta una contribuzione essenziale alla teoria delle serie divergenti, fornendo un metodo di sommazione regolare per una categoria di serie TAYLOR a raggio di convergenza nullo.

— — M. ÅLANDER (*Ibid.*, pag. 158).

In seguito ad una questione di PÓLYA determina tutte le funzioni di genere finito non aventi alcun zero complesso e dà una estesa bibliografia dei lavori consultati. *g. b.*

Funzioni di variabile reale. — S. STOILOW (*Ibid.*, pag. 227).

Mostra che la derivata di $f(x)$, funzione continua definita nell'intervallo $(0, 1)$, non può essere nulla che tutto al più su un insieme di misura S. S essendo la somma delle misure e_{y_0} (a misura positiva), e_{y_0} essendo l'insieme dell'intervallo $(0, 1)$ tale che $f(x) = y_0$.

— — C. KURATOWSKI (*Ibid.*, pag. 229).

Mediante una funzione $f(\alpha, x)$ dipendente da un numero trasfinito α della seconda classe e della variabile x, tratta delle funzioni determinate di classe α.

— — TH. ANGHELUTZA (*Ibid.*, pag. 53).

Mostra l'esistenza d'una classe di polinomi trigonometrici che si possono impiegare per la sommazione delle serie di FOURIER, generalizzando i metodi di FÉJER, JACKSON e DE LA VALLÉE-POUSSIN. *g. b.*

Equazioni differenziali. — G. V. PFEIFFER (*Ibid.*, pag. 62).

Fa notare di aver apportato al metodo d'integrazione delle equazioni a derivate parziali di LAGRANGE e CHARPIT una estensione di carattere pratico.

— — P. APPELL (*Ibid.*, pag. 64).

Fa notare come SALTYKOW, nelle recenti conferenze tenute nel Belgio, tratti della stessa questione.

Equazioni differenziali. — V. SALTYKOW (*Ibid.*, pag. 1528).

Richiama i suoi lavori sulle equazioni a derivate parziali e fa delle considerazioni relative al metodo di cui parla PFEIFFER in relazione alle sue memorie [1].

— — M. JUVET (*Ibid.*, pag. 486).

Estende agli integrali multipli il teorema di JACOBI per l'integrazione delle equazioni canoniche relative agli integrali semplici stazionari [2]. Ponendo in evidenza che un risultato ottenuto da PRANGE ha carattere generale [3].

— — E. GAU (*Ibid.*, pag. 278).

Introduce, nella teoria delle equazioni differenziali alle derivate parziali del secondo ordine, la nozione di funzione principale che permette di costruire degli invarianti. Enuncia poi alcuni teoremi relativi alla funzione principale [4]. *g. b.*

Funzione di variabile complessa. — ER. KOGBETLIANTZ (*Ibid.*, pag. 224).

Enuncia dei risultati per le medie aritmetiche di CESÀRO ottenuti analogamente alle sue ricerche sulle medie doppie tipiche dedotte col metodo sommatorio di RIESZ.

— — A. ANGELESCO (*Ibid.*, pag. 275).

Tratta dello sviluppo di una funzione $f(z)$ in serie di polimoni $P_n(x) = a_0b_n + a_1b_{n-1}x + ... + a_nb_0x^n$, i coefficienti dello sviluppo si esprimono mediante le funzioni Q_n associate alle P_n. *g. b.*

(1) SALTYKOW, Bull. Acc. R. Belg., pag. 595, (4 nov. 1922); Journ. Math. p. et app., s. 3ª, t. 3, pag. 423; s. 5ª (1899), pag. 455; Bull. Acc. Sc. di Pietrogrado, 1911, pag. 563; *C. R.*, T. 152 (1911), pag. 364; Atti del IV Congresso int. dei mat. (Roma, 1909, pag. 77).

(2) HADAMARD, *Leçons sur le calcul des variations*, pag. 163; VOLTERRA, (R. Acc. dei Lincei, t. 6, pag. 127); FRÉCHET, (Annali di matematica, s. 3ª, t. II, pag. 187).

(3) « Dissertation » Göttingen.

(4) Ved. GOURSAT, *Leçons sur l' intégr. des équat. aux dériv. partielles*; E. GAU, *Sur l' intégr. des équations* (Journ. Math. p. et appl., s. 6, t. 7 (1911), pag. 136)); CLAIRIN, *Sur les inv. caractéristiques* (Ann. Ec. Norm.), s. 3ª, t. 37 (1920).

Calcolo delle probabilità. — S. MILLOT (*Ibid.*, pag. 30, pag. 1695).

Nella prima nota fa conoscere una formula molto conforme alla teoria della probabilità *a priori*, che permette di determinare approssimativamente la probabilità d'un avvenimento a mezzo della conoscenza dello scarto osservato.

Nella seconda nota mostra l'utilità, dal punto di vista pratico, dei risultati ottenuti nella prima nota. *g. b.*

Teoria dei numeri. — B. DELAUNAY (*Ibid.*, pag. 554).

Dà una interpretazione geometrica semplice della generalizzazione dell'algoritmo delle frazioni continue [1].

— — M. FRÉCHET (*Ibid.*, pag. 1123).

Mostra come i suoi risultati sugli insiemi astratti e le funzioni misurabili contengano quelli ottenuti da WAZEWSKI e NIKODYN. *g. b.*

Funzioni di variabili complesse. — S. LEFSCHETZ (*Ibid.*, pag. 941).

Estende in due maniere differenti la nozione d'integrale doppio di seconda specie, e mostra la non equivalenza delle due estensioni se la multiplicità dell'integrale non è uguale a 2.

— — G. VALIRON (*Ibid.*, pag. 943).

Completa una proposizione di CARLEMAN, mostrando che se D_n e d_n sono il $\overline{\lim}$ e $\underline{\lim}$ di $|z|$ in Δ_n (essendo Δ_n una successione infinita di domini e per la funzione intiera $f(z)$; $|z|>1$, $|f(z)|<r^p$) il rapporto $\log D_n : \log d_n \to 1$ per $n \to \infty$.

— — P. NOAILLON (*Ibid.*, pag. 879).

Tratta delle funzioni armoniche il cui gradiente s'annulla all'∞.

— — G. BOULIGAND (*Ibid.*, pag. 822).

Porta una contribuzione sulle ricerche delle condizioni nelle quali l'estensione del campo ove una funzionale è definita influenza il suo modo di continuità [2].

[1] V. VORONOI, (*Sur une généralisation de l'algorithme des fractions continues* (1906).

[2] LÉVY, *Leçons d'Analyse fonctionnelle*, pag. 19.

Funzioni di variabili complesse. — E. PICARD (*Ibid.*, pag. 933 e pag. 1025).

In seguito alla nota di NOAILLON si propone la questione: « Una funzione armonica uniforme e continua in un dominio D, salvo in un punto A nelle vicinanze del quale si sa che il valore assoluto è limitato, è armonica in A?

Dimostra che si deve rispondere affermativamente nel caso di 2 e di 3 variabili applicando rispettivamente l'integrale di CAUCHY e la formula di GREEN.

— — E. LEBESGUE (*Ibid.*, pag. 1097 e pag. 1270).

Nella prima nota dimostra, servendosi delle proprietà generali delle funzioni armoniche, l'impossibilità per una funzione di un numero di variabili uguale o maggiore di tre di essere armonica, salvo su un arco analitico (o rettificabile).

Nella seconda nota aggiunge due indicazioni sulle singolarità delle funzioni armoniche.

— — G. BOULIGAND (*Ibid.*, pag. 1037 e pag. 1066).

Nella prima nota indica un nuovo metodo per studiare una funzione armonica nelle vicinanze d'una singolarità isolata.

Nella seconda continua le sue ricerche sulle singolarità delle funzioni armoniche in casi eccezionali. *g. b.*