UMI

Sunti di lavori italiani

* Lavori di: O. Nicoletti, M. Pascal, M. Piazzola-Beloch, G. Sansone

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **3** (1924), n.3, p. 109–114.

Unione Matematica Italiana

¡http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1924_1_3_3_109_0¿

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 1924.

SUNTI DI LAVORI ITALIANI

O. NICOLETTI: *Sui minori di ordine* n -2 *di un determinante di ordine* n. « Annali delle Università Toscane », Nuova Serie, vol. VIII, 1923.

In questa nota l'A. estende ad un determinante qualunque di ordine n alcune notevoli identità, recentemente date dal sig. T. MUIR sui minori di ordine $n-2$ di un determinante di ordine n, reale e simmetrico. Considera poi in modo particolare i determinanti di HERMITE (di 1ª e di 2ª specie); e dalle identità dimostrate trae alcuni corollari notevoli, di cui alcuni sono noti solo in casi particolari e sono stati dimostrati ricorrendo ad altre teorie. Citiamo, ad esempio, i teoremi:

a) Se in un determinante di HERMITE di 1ª specie,

$$D \equiv |a_{ik}|, \ (a_{ik} = \bar{a}_{ki}; \ i, k = 1, 2 \ldots n)$$

è nullo un minore principale $A_{ii} = \frac{\partial D}{\partial a_{ii}}$ di ordine $n-1$, e si indica con $\theta_{ii} = \sum_1^n {}_s \frac{\partial^2 D}{\partial a_{ii} \partial a_{ss}}$ la somma dei minori principali di ordine $n-2$ del minore A_{ii}, si ha $D \cdot \theta_{ii} < 0$;

b) Se in un determinante D di HERMITE di 1ª specie sono nulle le somme S_{n-1}, S_{n-2} dei minori principali di ordine $n-1$ e di ordine $n-2$, il determinante D ha caratteristica minore di $n-1$. Quest'ultimo teorema è caso particolare di un altro, più generale, che l'A. stesso dimostrò, mediante la teoria delle equazioni algebriche e quella dei divisori elementari; la dimostrazione che l'A. ne dà in questa nota, non dipende dalle teorie ricordate; inoltre, secondo le idee di KRONECKER, essa è dedotta da identità generali tra il determinante D ed i suoi minori dell'ordine $n-1$ ed $n-2$.

MARIO PASCAL: *Calcolo della forza sostentatrice per alcuni profili.* « Rend. R. Acc. Sc. Fis. e Mat. », (3), v. 28, 1923.

Vari Autori hanno considerato diversi tipi di profili piani di ostacolo ed hanno determinata, in base al fondamentale teorema di KUTTA-JONKOWSKI, la forza sostentatrice agente su di essi quando siano investiti dalla più generale corrente circuito-traslatoria bidimensionale. L'A. considera due profili formati dalla riunione, il primo di due ed il secondo di quattro archi di cerchio di raggio diverso, e dai quali si posson ricavare come casi particolari altri tipi già studiati da KUTTA e da SONNEFELD. Per il calcolo della forza sostentatrice, si tratta in definitiva di trasformare in modo conforme l'area esterna al dato profilo in un semipiano: a ciò l'A. riesce applicando la nota formula di CHRISTOFFEL-SCHWARZ.

MARIO PASCAL: *Corrente fluida bidimensionale intorno a due lamine consecutive.* « Giorn. di Mat. di Battaglini », v. 61, 1923.

Invece di fissare *a priori* la forma del profilo dell'ostacolo e determinare la funzione di variabile complessa rappresentativa della corrente investitrice e quindi in conseguenza la distribuzione delle velocità, cioè la funzione $w = u - iv$, si può, seguendo un cammino inverso, costruire la funzione w dotata delle singolarità caratteristiche, e dedurre da essa tanto la funzione rappresentativa della corrente, quanto la forma dell'ostacolo pensato come materializzazione di archi di linee di flusso. La funzione u deve: essere monodroma su una Riemanniana su una falda della quale si immagina avvenga il fenomeno fisico; assumere valore finito all'infinito della falda fisica; e non possedere sulla Riemanniana altre singolarità che dei poli.

Partendo da lavori del BLASIUS che ha considerato funzioni w su Riemanniane a due falde con due punti di diramazione (profili semplici laminari o no), l'A. costruisce una funzione w monodroma su una Riemanniana a due falde ma con quattro punti di diramazione, e soddisfacente alle altre proprietà. Si hanno così ostacoli, laminari o no, formati dall'insieme di due profili la cui reciproca posizione dipende dalla posizione dei quattro punti di diramazione; l'A. fa in modo, per semplicità, che questi siano allineati: ottiene quindi ostacoli posti l'uno dietro l'altro.

Come il BLASIUS ha potuto, partendo dalla w che egli ha considerato, ottenere con opportune trasformazioni il caso dell'ostacolo a persiana, costituito cioè dall'insieme di infiniti elementi sovrapposti, basandosi sulla w costruita dall'A. si potrà in modo analogo studiare il caso in cui l'ostacolo è formato da una doppia serie di elementi sovrapposti.

MARIO PASCAL: *Observations sur la Note « Circulation superficielle » de M. S. Noaillon.* « Comptes Rendus », Paris, t. 177, 1923.

In una Nota pubblicata nei « Comptes Rendus » il NOAILLON, riprendendo il concetto di circuitazione superficiale introdotto dall'A., aveva creduto di dimostrare che tale vettore è sempre ed in ogni caso nullo. Inoltre, fraintendendo il significato di un teorema dimostrato dall'A., e l'estensione al caso spaziale del teorema di KUTTA-JONKOWSKI, aveva attribuito all'A. il ben noto teorema di CISOTTI.

L'A. in risposta si richiama alla sua Memoria *Circuitazione superficiale* (« Giorn. di Mat. di Battaglini », v. 59, 1921) in cui è sviluppato un esempio che, pur non dando un caso di corrente fluida fisicamente ammissibile, serve pur tuttavia a far vedere che il vettore della circuitazione superficiale *non è sempre nullo.*

Non è inutile del resto far osservare che una delle componenti della resistenza che si trovano mediante la teoria di PRAUDTL, si esprime appunto con una formazione identica a quella della circuitazione superficiale.

MARGHERITA PIAZZOLA-BELOCH: *Sulle superficie iperellittiche del 4° ordine con 15 punti doppi.* « Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo », t. XLVII, 1923.

L'A. si propone uno studio generale delle curve situate sopra una superficie iperellittica (di rango 2) del 4° ordine con 15 punti doppi.

Dimostra che, studiando le curve sulla superficie iperellittica F, di divisore $2r^2+1$ (tutte *d'ordine pari*) si è sicuri di ottenere curve giacenti sopra *ogni* superficie iperellittica di divisore δ, legata alla precedente dalla relazione

$$n^2\delta = 2r^2 + 1.$$

Partendo dalle note espressioni, che danno l'ordine n e il genere π d'una curva situata sulla superficie F, l'A. indica un procedimento per determinare la corrispondente funzione theta.

Trova così *tutte* le coniche e quartiche di genere 1, situate sulla superficie F, e dimostra che *sopra ogni superficie iperellittica del 4° ordine con 15 punti doppi esistono 10 coniche; passanti ognuna per 6 punti doppi della superficie.* Per ognuno dei punti doppi della superficie ne passano quattro. Esse sono curve di contatto di 10 piani tangenti singolari.

I punti doppi situati sopra ogni conica si distribuiscono in due terne; per due punti appartenenti ad una stessa terna passa una sola conica; per due punti appartenenti a terne diverse ne passano due.

Sopra ogni superficie iperellittica del 4° ordine con 15 punti doppi esistono 15 fasci di quartiche gobbe di prima specie, passanti ognuna per 8 punti doppi della superficie. Esse sono curve di contatto di quadriche tangenti alla superficie. Vi sono perciò 15 famiglie di quadriche iscritte alla superficie lungo quartiche di genere 1.

MARGHERITA PIAZZOLLA-BELOCH: *Sulle superficie iperellittiche del 4° ordine con 14 punti doppi.* (« Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo », T. XLVIII, 1924).

L'A. si propone uno studio generale delle curve situate sopra una superficie iperellittica (di rango 2) del 4° ordine con 14 punti doppi.

Dimostra che studiando le curve situate sulla superficie F, iperellittica del 4° ordine con 14 punti doppi, di divisore $\frac{k_1^2 + k_2^2 + 2}{2}$, si è sicuri di ottenere curve giacenti sopra *ogni* superficie iperellittica del 4° ordine con 14 punti doppi, di divisore δ, legata alla precedente dalla relazione

$$2n^2\delta - 2 = k_1^2 + k_2^3.$$

Per δ dispari, (ossia k_1 e k_2 pari), tutte le curve sulla superficie sono d'ordine pari; per δ pari ciò non avviene.

Seguendo un metodo analogo a quello già tenuto per le superficie iperellittiche del 4° ordine con 15 punti doppi, l'A. dimostra che:

1) *Sulla superficie* F, *di divisore* $\frac{\mathrm{k}_1^2 + \mathrm{k}_2^2 + 2}{2}$, *(per* k_1 *e* k_2 *arbitrarie), non esistono rette.*

Nel caso particolare invece, in cui $k_1 = 1$, k_2 arbitraria (ma dispari), esiste, sulla superficie F relativa, una retta passante per tre punti doppi della superficie e che giace nel piano della conica singolare, (il quale piano tocca la superficie lungo la retta), e non ve ne sono altre.

Se poi contemporaneamente $k_1 = 1$ e $k_2 = 1$, esistono sulla superficie F, (di divisore 2), due rette analoghe alla precedente.

2) ***Sopra ogni superficie iperellittica del 4° ordine con 14 punti doppi, esistono 6 coniche, passanti ognuna per 6 punti doppi della superficie. Esse sono curve di contatto di 6 piani tangenti singolari.***

Per 8 dei 14 punti doppi passano tre piani singolari, per ognuno dei rimanenti ne passano due.

Nel caso particolare in cui $k_1 = k_2$, esistono sulla superficie F, di divisione $k^2 + 1$, oltre le 6 coniche precedenti, due coppie di coniche complanari, passanti, ciascuna coppia, per 4 punti doppi della superficie.

3) ***Sopra ogni superficie iperellittica del 4° ordine con 14 punti doppi, esistono 7 fasci di quartiche gobbe di 1ª specie, passanti ognuno per 8 punti doppi della superficie. Queste quartiche sono curve di contatto di quadriche tangenti alla superficie.***

4) L'A. dimostra ancora che sulle superficie F, di divisore $\frac{k_1^2 + k_2^2 + 2}{2}$, (per k_1 e k_2 arbitrarie), non esistono cubiche gobbe, o quartiche gobbe di 2ª specie, ed enumera i casi particolari in cui ve ne sono.

G. SANSONE: *Le relazioni fondamentali fra le operazioni generatrici del gruppo modulare finito con coefficienti del campo di Gauss.* In pubblicazione nei « Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo ». T. XLVIII.

In questa nota completo lo studio dei gruppi modulari finiti $G_{\mu(n)}$ a coefficienti interi complessi per moduli multipli di 4 [1].

Le mie precedenti ricerche si fondano essenzialmente sul teorema che le sostituzioni unimodulari a coefficienti interi di GAUSS

$$(1) \qquad z' = \frac{(1 + na)z + nb}{ncz + (1 + nd)},$$

con $n = m(1 + i)^\lambda$, m dispari, $\lambda = 0, 1, 2, 3$ si possono esprimere come prodotti di un numero finito di sostituzioni paraboliche del gruppo $\Gamma_{\mu(n)}$ da esse individuato.

Questo teorema non può estendersi ai moduli $n = 4m$, infatti io provo, che *se la sostituzione* (1) *è un prodotto di un numero finito di sostituzioni paraboliche del gruppo* $\Gamma_{\mu(4m)}$, *è il simbolo di*

(1) Un breve riassunto degli studi da me fatti per i sottogruppi del gruppo di PICARD e per i corrispondenti gruppi modulari finiti per moduli non multipli di 4 è stato già pubblicato in questo *Bollettino*, anno III, n.° 1, pag. 22.

DIRICHLET-JACOBI $\left[\dfrac{c}{1+na}\right]=+1$, e perciò le sostituzioni (1) per le quali sia $\left[\dfrac{c}{1+na}\right]=-1$, come ad esempio la sostituzione

$$z'=\frac{(1+4m)z+8m^2(1-i)}{4m(1+i)z+1-4m+16m^2},$$

non possono esprimersi come prodotti di un numero finito di sostituzioni paraboliche del gruppo $\Gamma_{\mu(4m)}$.

Varie considerazioni mi permettono poi di trovare anche per i gruppi modulari finiti $G_{\mu(4m)}$ che diano la rappresentazione del gruppo di PICARD per il suo sottogruppo $\Gamma_{\mu(4m)}$ le relazioni caratteristiche fra le operazioni generatrici del gruppo stesso, espresse dal seguente teorema:

Il gruppo modulare finito $G_{\mu[m(1+i)^\lambda]}$ *con* $\lambda \geq 4$ *e* n *dispari, si genera con le* 4 *operazioni indipendenti:*

$$(2)\qquad S=\begin{pmatrix}0, & 1\\ -1, & 1\end{pmatrix};\quad T=\begin{pmatrix}0, & 1\\ -1, & 0\end{pmatrix},\quad U=\begin{pmatrix}0, & i\\ i, & 1\end{pmatrix},\quad V=\begin{pmatrix}0, & i\\ i, & 0\end{pmatrix}.$$

e posto:

$$n(1+i)^\lambda=n_1+in_2,\quad nn_0=m$$

ogni altra relazione fra le S. T. U, V, *è conseguenza delle seguenti:*

$$(3)\qquad \begin{gathered} S^3=1,\quad T^2=1,\quad U^3=1,\quad V^2=1,\\ (TU^2)^2=1,\quad (VS^2)^2=1,\quad (TV)^2=1,\quad (SU^2)^2=1,\\ (TS^2)^{n_1}(VU^2)^{n_2}=1,\quad (TS^2)^{-n_2}(VU^2)^{n_1}=1,\\ \Omega_{m,\lambda}=1: \end{gathered}$$

essendo $\Omega_{m,4}$ *l'espressione per le* S, T, U, V *di*

$$\begin{pmatrix}1, & m(1+i)^3\\ 0, & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1, & 1\\ 1+i, & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1, & m(1+i)^3\\ 0, & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-(1+i), & 1\\ 1, & 0\end{pmatrix},$$

e per $\lambda>4$, $\Omega_{m,\lambda}$ *l'espressioni per le* S, T, U, V *di*

$$\Omega_{m,\lambda-1}\begin{pmatrix}1+m(1+i)^{\lambda-1}a, & -m(1+i)^{\lambda-1}a\\ m(1+i)^{\lambda-1}a, & 1-m(1+i)^{\lambda-1}a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1, & 0\\ m(1+i)^{\lambda-1}b, & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1, & m(1+i)^{\lambda-1}c\\ 0, & 1\end{pmatrix}$$

con gli interi a, b, c, d $=0, 1$ *scelti in guisa che* $\Omega_{m,\lambda}$ *sia del gruppo* $\Gamma_{\mu[m(1+i)^\lambda]}$.

Firenze, 9 marzo 1924.