Bollettino Unione Matematica Italiana

Mauro Picone

Un teorema sulle funzioni sommabili

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **3** (1924), n.3, p. 104–106.

Unione Matematica Italiana

¡http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1924_1_3_3_104_0¿

Un teorema sulle funzioni sommabili.

Nota di MAURO PICONE

Sia I un insieme chiuso di punti dello spazio lineare $S_{(n)}$ a n dimensioni, per ogni punto P di $S_{(n)}$ designeremo con $\delta(P)$ la distanza di P da I e diremo punti *associati* a P i punti di I che hanno da P distanza $\delta(P)$.

Sia D un dominio dello spazio lineare $(u_1, u_2, \ldots, u_\nu)$ a ν dimensioni, $\nu < n$, diremo *varietà regolare chiusa a ν dimensioni, di base D*, il luogo V dei punti dello spazio $S_{(n)}$ descritto dal punto P di coordinate

$$x_1 = f_1(u_1, u_2, \ldots, u_\nu), \ldots, \quad x_n = f_n(u_1, u_2, \ldots, u_\nu), \tag{1}$$

al variare dal punto $(u_1, u_2, \ldots, u_\nu)$ nel dominio D, quando risultino verificate le seguenti condizioni:

a) Il dominio D è limitato.

b) Le funzioni $f_1, f_2, \ldots, f_n$ sono definite in D e vi sono continue con le loro derivate prime.

c) Riesce sempre in D

$$\Delta = \left\| \begin{matrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial u_1} & \dfrac{\partial f_2}{\partial u_1} & \ldots & \dfrac{\partial f_n}{\partial u_1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \dfrac{\partial f_1}{\partial u_\nu} & \dfrac{\partial f_2}{\partial u_\nu} & \ldots & \dfrac{\partial f_n}{\partial u_\nu} \end{matrix} \right\|^2 > 0.$$

d) Detto D' un qualsiasi dominio costituito di punti interni a D e V' quella parte di V descritta da P al variare del punto $(u_1, u_2, \ldots, u_\nu)$ in D', le (1) pongono sempre una corrispondenza biunivoca fra i punti di V' e i punti di D'.

e) *Comunque si fissi in* $\mathrm{S}_{(n)}$ *un punto* P *fuori di* **V**, *la congiungente di* P *con ogni punto di* **V** *associato a* P, *risulta sempre normale alla* **V**, *in quel punto.*

f) Detto $C_{(n-\nu)}(P, r)$ il dominio circolare dello spazio $S_{(n-\nu)}$ normale in P alla V, di raggio r e di centro in P, esiste un numero positivo $r_0(V)$ tale che, comunque si fissi $r \leq r_0(V)$ e comunque si prendano su V due punti P' e P'', i due dominii $C_{(n-\nu)}(P', r)$ e $C_{(n-\nu)}(P'', r)$ non hanno mai punti comuni.

Diremo invece *varietà regolare aperta a* ν *dimensioni di base* D, il luogo V dei punti dello spazio $S_{(n)}$, descritto dal punto P, di coordinate date dalle (1), al variare del punto $(u_1, u_2, ..., u_\nu)$ nel dominio D, se, essendo soddisfatte tutte le condizioni *a*), *b*), *c*), *d*), *f*), in luogo della *e*) è soddisfatto la seguente:

e') *Esistono su* **V** *punti* Q *associati a punti* P *dello spazio* $\mathrm{S}_{(n)}$, *fuori di* **V**, *tali che la* PQ *non riesce normale in* Q *alla* **V** *e la totalità di questi punti* Q *è una varietà regolare chiusa a* $\nu - 1$ *dimensioni.* Chiameremo questa varietà bordo della V.

Data una varietà regolare V a ν dimensioni (chiusa o aperta), il dominio di $S_{(n)}$ descritto da un dominio circolare $C_{(n)}(P, r)$ di $S_{(n)}$, di centro in P e di raggio r, nel mentre che P descrive la V, sarà detto *intorno completo di* **V** *di raggio* r; il dominio di $S_{(n)}$ descritto dal dominio circolare, di $S_{(n-\nu)}$, normale in P alla V, nel mentre che P descrive la V, sarà detto *intorno incompleto di* **V** *di raggio* r. Se la varietà è chiusa i due suoi intorni completo e incompleto di raggio r coincidono. Se la varietà è aperta il suo intorno completo di raggio r è la somma del suo intorno incompleto di raggio r e dell'intorno completo di eguale raggio del bordo.

Se $r \leq r_0(V)$, posto $q = n - \nu$, l'elemento di volume dell'intorno incompleto di raggio r della varietà regolare V (chiusa o aperta) ha l'espressione

$$\rho^{q-1}(\sqrt{\Delta} + \rho\varphi_1 + \rho^2\varphi_2 + ... + \rho^\nu\varphi_\nu) \operatorname{sen}^{q-2}\theta_1 \operatorname{sen}^{q-3}\theta_2 ... \operatorname{sen}\theta_{q-2} \times$$
$$\times\, du_1 du_2 ... du_\nu d\rho d\theta_1 d\theta_2 ... d\theta_{q-2} d\theta_{q-1},$$

ove, posto

$$v_1 = \operatorname{sen}\theta_1 \operatorname{sen}\theta_2 ... \operatorname{sen}\theta_{q-2} \operatorname{sen}\theta_{q-1},$$
$$v_2 = \operatorname{sen}\theta_1 \operatorname{sen}\theta_2 ... \operatorname{sen}\theta_{q-2} \cos\theta_{q-1},$$
$$v_3 = \operatorname{sen}\theta_1 \operatorname{sen}\theta_2 ... \cos\theta_{q-2},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$v_{q-1} = \operatorname{sen}\theta_1 \cos\theta_2,$$
$$v_q = \cos\theta_1,$$

la φ_i $(i = 1, 2, ..., \nu)$ rappresenta una funzione razionale intiera omogenea di grado i nelle $v_1, v_2, \ldots, v_q$, i cui coefficienti sono ben determinate funzioni delle $u_1, u_2, \ldots, u_\nu$, la variabile ρ varia nell'intervallo $(0, r)$, le variabili $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_{q-2}$ nell'intervallo $(0, \pi)$ e la variabile θ_{q-1} nell'intervallo $(0, 2\pi)$.

Ne segue che, se $r \leq r_0(V)$, la misura di un intorno incompleto di raggio r di una varietà regolare V (chiusa o aperta a ν dimensioni) è data da

$$r^{n-\nu}(A_0 + A_1 r^2 + A_2 r^4 + \ldots + A_{\nu/2} r^\nu), \text{ se } \nu \text{ è pari,}$$

$$r^{n-\nu}(A_0 + A_1 r^2 + A_2 r^4 + \ldots + A_{(\nu-1)/2} r^{\nu-1}), \text{ se } \nu \text{ è dispari,}$$

ove

$$A_0 = c \int_V \sqrt{\Delta}\, du_1 du_2 \ldots du_\nu,$$

c designando un certo coefficiente numerico positivo (dipendente soltanto da n e da ν), e $A_1, A_2, \ldots$ sono del pari quantità che dipendono unicamente dalla varietà V. È facile dopo ciò dimostrare il

Teorema. *Sia* V *una varietà regolare (chiusa o aperta) a* ν *dimensioni dello spazio* $S_{(n)} (\nu < n)$ *e, per ogni punto* P *di* $S_{(n)}$ *si designi con* $\delta(P)$ *la distanza di* P *dalla* V. *Sia* I *un qualsiasi insieme di punti di* $S_{(n)}$ *misurabile* (LEBESGUE) *e di misura finita; ogni funzione* f(P), *definita in* I *ed ivi misurabile, per la quale si abbia sempre*

(2) $$|f(P)|\,[\delta(P)]^\alpha \leq M,$$

ove α *e* M *sono due determinate quantità reali non negative, è sommabile su* I *se*

$$\alpha < n - \nu.$$

Si dimostra subito infatti che, se $r \leq r_0(V)$ la funzione $1/[\delta(P)]^\alpha$ è sommabile sopra l'intorno incompleto di raggio r della V, tale intorno è completo se la varietà è chiusa. Se questa è aperta la funzione $1/[\delta(P)]^\alpha$ riesce ancora sommabile sull'intorno completo di raggio r, perchè essa è sommabile sull'intorno incompleto di raggio r e sull'intorno completo di eguale raggio del bordo della varietà. Detto J l'intorno completo di raggio r della V, la funzione $f(P)$ è sommabile su IJ perchè ivi è sommabile $M/[\delta(P)]^\alpha$ e sussiste la (2), è sommabile su $I - J$ perchè vi è limitata: si ha, dalla (2), $[f(P)] \leq M/r^\alpha$. La $f(P)$ è dunque sommabile su $I = IJ + (I - J)$.

Il teorema enunciato sussiste però anche in ipotesi molto più larghe per la varietà V.

Pisa, 26 marzo 1924.