UMI

Recensioni

* S. Pincherle. — Gli elementi della teoria delle funzioni analitiche
* C. V. L. Charlier. Vorlesungen über die Grundzüge der Mathematischen Statistik
* F. Vinci. Statistica metodologica
* W. Blaschke: Vorlesungen Uber Differentialgeometrie — II. Affine Differentialgeometrie

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **3** (1924), n.2, p. 80–91.

Unione Matematica Italiana

¡http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1924_1_3_2_80_0¿

RECENSIONI

S. PINCHERLE. — *Gli elementi della teoria delle funzioni analitiche.* Bologna, N. Zanichelli, 1922 [1].

Nel Cap. IX si studiano le funzioni intere. È fatto vedere che ogni funzione intera che non ammette radici al finito è della forma $e^{g(x)}$ ove g è funzione intera; se ha radici α_h è della forma $e^{g(x)}\prod_1^m(x-\alpha_h)$ con $g(x)$ funzione intera. È fatto vedere che se C è un qualunque valore nullo, finito, od infinito, esiste sempre una successione di punti c_h tendenti all'infinito corrispondentemente alla quale la successione $f(c_h)$ tende a C. Si risolve poi il problema di WEIERSTRASS: data una successione di numeri $a_1, a_2, \ldots a_n, \ldots$ i cui moduli formano una successione generalmente crescente tendente all'infinito, costruire una funzione intera che ammetta per radici tutti e soli i numeri della detta successione.

Determinata una successione di numeri interi $m_1, m_2, \ldots m_n, \ldots$ tali che converga assolutamente la serie $\Sigma a_n^{-m_n}$ (ciò che è possibile in infiniti modi), posto

$$E_n(x) = \left(1 - \frac{x}{a_n}\right)e^{\frac{x}{a_n}+\frac{x^2}{2a_n^2}+\ldots+\frac{x^{m_n-1}}{(m_n-1)a_n^{m_n-1}}},$$

si dimostra che la soluzione cercata è data da $G(x) = e^{\gamma(x)}\prod_{n=1}^{\infty}E_n(x)$ ove $\gamma(x)$ è una funzione intera; basta moltiplicare x^s per avere la funzione che oltre ad annullarsi nei punti $a_1, a_2, \ldots a_n, \ldots$ abbia in $x=0$ una radice di ordine s. Se i numeri m_n di dianzi si possono prendere tutti uguali a $p+1$ mentre $\Sigma\,|\,a_n\,|^{-p}$ diverge, p si dice il *rango* della funzione intera. Se in $G(x)$ la γ è razionale di grado q ed il rango è p, il maggiore dei due numeri p e q si dice *genere* di $G(x)$. Usando la notazione $f(x) = 0(\varphi(x))$ per indicare che il quoziente $f(x):\varphi(x)$ tende a zero al tendere di x a infinito,

[1] Continuazione, v. anno III, n. 1, p. 40.

si dimostra (POINCARÉ) che per una funzione di genere p è $\log M(r) = 0(r^{p+1})$ sopra il cerchio (r). Se funzione di genere p è lo sviluppo $\Sigma c_\nu x^\nu$ si dimostra pure col POINCARÉ che $c_\nu = 0\left((\nu!)^{-\frac{1}{p+1}}\right)$. Chiamando meromorfa una funzione analitica uniforme avente come singolarità solamente poli si dimostra che la derivata logaritmica di una funzione intera, è funzione meromorfa; di più si dimostra (LAGUERRE) che se $\frac{G'(x)}{x^p G(x)}$ tende uniformemente a zero per $x \to \infty$, la funzione intera $G(x)$ è di genere p.

Il Capitolo X è dedicato al problema di MITTAG-LEFFLER. Si comincia col risolvere il problema seguente: data una successione di numeri $a_1, a_2, \ldots a_n, \ldots$ i cui moduli formano una successione generalmente crescente tendente a ∞ ed una successione di funzioni intere $G_1(x), G_2(x), \ldots G_n(x), \ldots$ costruire funzione analitica uniforme regolare in tutto il piano tranne che nei punti a_n ed ivi avente singolarità caratterizzata da $G_n\left(\frac{1}{x-a_n}\right)$. La successione A dei numeri a_n possa avere più punti limiti in modo però che l'aggregato derivato A' non contenga alcun punto di A: in queste condizioni si dà il modo di costruire una funzione analitica regolare in tutto il piano ad eccezione dei punti di A ove le singolarità sono caratterizzate da $G_n\left(\frac{1}{x-a_n}\right)$ e dei punti di A' Come applicazione della teoria precedente è risoluto il problema PICARD di determinare una funzione uniforme la quale ammette un sistema di radici avente come punti limiti i punti di una circonferenza. Segue un metodo di RUNGE per sviluppare una funzione analitica regolare entro un campo T chiuso in funzioni razionali, un metodo di PAINLEVÉ per sviluppare una funzione analitica in serie di funzioni razionali intere, uno di MONTEL col quale una funzione analitica regolare entro un' area T limitata da una cassinoide ad m fuochi definita da $|P(x)| = k$ ($P(x)$ polinomio che ha m radici semplici) si può sviluppare in una serie $\Sigma Q_n(x) P^n(x)$ ove Q_n è un polinomio di grado $m-1$, sviluppo valido entro l'area limitata dalla cassinoide $|P(x)| = k_1$ con $k_1 < k$ ma prossimo a k quanto si vuole. Da questo sviluppo HILBERT ha dedotto l'espressione di una funzione analitica mediante una serie di polinomi valida in tutto il campo di regolarità della funzione. È fatto infine un cenno sulla rappresentazione di un ramo uniforme di una funzione analitica in una stella mediante una serie di polinomi (MITTAG-LEFFLER).

Nel Cap. XI, premesso un cenno sulle funzioni analitiche di due variabili, si enuncia il principio di conservazione delle proprietà analitiche: se gli elementi delle funzioni $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_p$ relativi ad un punto regolare soddisfano ad un sistema di equazioni $F_h(\alpha_1, \ldots \alpha_p) = 0$ $(k = 1, 2, \ldots q)$ con F simbolo di funzione intera dei suoi argomenti, allo stesso sistema soddisfano le $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_p$ in tutto il loro campo di regolarità. È dimostrato poi il teorema fondamentale delle funzioni implicite, prima nel caso in cui in $x = a$, $y = b$, ove è soddisfatta l'equazione $F(x, y) = 0$, (F funzione analitica regolare monodroma) non si annulli F_y', nel qual caso esiste una funzione analitica y di x regolare in un intorno di $x = a$, assumente il valore b in $x = a$; poi nel caso generale, in cui $F_y'(a, b) = 0$, nel qual caso se $F = (y - b)^s\varphi(y - b) + f(x, y)$ con φ non annullantesi per $y = b$, ad ogni x di un conveniente intorno di $x = a$ la $F(x, y) = 0$ ha s radici che per $x = a$ si riducono a b, radici che coincidono con quelle di una equazione algebrica, di grado s, i cui coefficienti sono funzioni analitiche di x.

Nel Cap. XII si considera il caso particolare che $F(x, y)$ sia una funzione razionale intera $\alpha_0(x)y^m + \alpha_1(x)y^{m-1} + \ldots + \alpha_m(x)$, nel qual caso la funzione y di x definita da $F = 0$ si dice funzione *algebrica*. I punti in cui si annulla il discriminante si dicono *punti critici algebrici*. Escluso che x sia un punto critico od una radice di $c_0(x)$, se $b_1, b_2, \ldots b_m$ sono le m radici di $F(a, y) = 0$, nell'intorno di a si hanno m elementi di funzioni analitiche rappresentati da m serie $y_h = P_h(x - a)$ fra loro diverse che si riducono a b_h per $x = a$. Sia c un punto critico; se $F(c, x) = 0$ ha b come radice s-pla, nell'intorno di c si hanno s radici di $F = 0$ che tendono a b al tendere di x a c. Sia $\bar{x}$ un punto sufficentemente prossimo a c; l'equazione $F(\bar{x}, y) = 0$ ha m radici $\bar{y}_h$ delle quali s tendono a b al tendere di x a c; nell'intorno di $\bar{x}$ a queste s radici corrispondono gli elementi $y_h = P_h(x - \bar{x})$ $(h = 1, 2, \ldots s)$. Si faccia di y_1 la continuazione analitica per mezzo di una successione di punti sulla circonferenza per $\bar{x}$ che ha c per centro; quando si è giunti di nuovo in $\bar{x}$ si è eseguita su y_1 un'operazione che si indica con Oy_1. Se avviene che $Oy_1 = y_2$, $Oy_2 = y_3, \ldots Oy_k = y_1$, si dice che gli elementi $y_1, y_2, \ldots y_k$ formano un *sistema circolare* od un *ciclo*. È allora fatto vedere come le s radici si distribuiscano in cicli e col metodo di PUISEUX si apprende a giungere alla loro separazione. Se v è il numero di elementi di un ciclo, i rami corrispondenti della y sono rappresentati da serie di potenze intere di $(x - c)^{\frac{1}{v}}$. Se c oltre che punto critico è punto di infinito per qualche ramo, lo sviluppo corrispondente contiene qualche potenza negativa. Se si dice punto algebrico per una funzione analitica un punto c nell'intorno del quale vale uno sviluppo della forma $y = b + a_1(x - c)^{\frac{h}{v}} + a_2(x - c)^{\frac{h+1}{v}} + \dots$ con h, v interi, di cui il primo positivo o negativo, si dimostra che una funzione analitica che per ogni x ha non più di m valori ed ammette come singolarità soli punti algebrici e poli è una funzione algebrica. Se $\bar{x}$ è un punto regolare della funzione algebrica definita dall'equazione irriducibile $F = 0$ e $\bar{y}_1, \dots \bar{y}_m$ sono i relativi valori, è sempre possibile tracciare una linea tale che partendo da $\bar{x}$ con uno dei valori $\bar{y}_k$ fa giungere in $\bar{x}$ con un prefissato altro valore $\bar{y}_k$. Il capitolo si chiude con un rapido studio delle superfici Riemanniane e della rappresentazione di una funzione algebrica su di una Riemanniana.

Nel Cap. XIII è fatto vedere che se $f(y)$ è funzione analitica regolare in un campo contenente b ed ivi non nulla, l'equazione $y - b - xf(y) = 0$ ammette in y la soluzione $b + \sum_1^\infty \frac{x^n}{n!} D^{n-1} f(b)^n$ (ove D è simbolo di derivazione) il cui raggio di convergenza è non inferiore al minimo modulo di $\frac{1}{f'(y_r)}$ se y_1, $y_2, \dots$ sono le radici di $f(y) - (y - b)f'(y) = 0$. Fra le applicazioni di questa formula (sviluppo di LAGRANGE) è a notarsi l'inversione della funzione $x = \sum_1^\infty a_n y^n$ e la soluzione dell'equazione $y - t = x\frac{y^2 - 1}{2}$ data da $y = t + \Sigma \frac{x^n}{n!} D^{n-1}\left(\frac{t^2 - 1}{2}\right)^n$, di cui si determina il raggio di convergenza. Il polinomio $D^{n-1}\left(\frac{t^2 - 1}{2}\right)^n$ coefficiente di x^n nello sviluppo in serie di potenze di x di $(1 - 2t + x^2)^{-\frac{1}{2}}$ è l'n^{simo} polinomio di LEGENDRE, $P_n(t)$ (funzioni sferiche). $P_n(t)$ soddisfa all'equazione differenziale $(t^2 - 1)P_n'' + 2tP_n' - n(n + 1)P_n = 0$, alle due equazioni miste differenziali e ricorrenti $nP_n = tP'_{n-1} - P'_{n-1}$, $P'_{n+1} - (2n + 1)P_n - P'_{n-1} = 0$. È mostrato come il sistema di codesti polinomi sia *ortogonale.*

Il Cap. XIV è dedicato alle funzioni ellittiche. La Riemanniana R, su cui si rappresenta la funzione algebrica y di t definita da $y^2 = R(t) = (t - a_1)(t - a_2)(t - a_3)(t - a_4)$ che ha nei quattro punti a_1, a_2, a_3, a_4 i punti critici, si rende semplicemente connessa con due tagli. Detta R' la Riemanniana così tagliata, fissato t_0 l'integrale $x(t) = \int_{t_0}^{t} \frac{dt}{\sqrt{R(t)}}$ è funzione ad un valore e finita dei punti t di R'. In due punti infinitamente vicini appartenenti ai due lembi di uno dei due tagli la funzione $x(t)$ differisce per una costante ω e in due punti similmente posti rispetto all'altro taglio differisce per un'altra costante ω', di guisa che sulla Riemanniana R la $x(t)$ è funzione multiforme: se $\bar{x}(t)$ è uno dei valori tutti gli altri sono dati da $\bar{x}(t) + m\omega + m'\omega'$ con m, m' numeri interi qualunque. Le costanti ω, ω' si dicono *moduli di periodicità*; essi non possono avere rapporto razionale. La funzione $t = \tau(x)$ inversa della $x = x(t)$ ha per campo di validità tutto il piano tranne $x = \infty$ e non ha altre singolarità se non che poli di primo ordine. Vale la relazione $\tau(x) = \tau(x + m\omega + m'\omega')$ cioè τ è doppiamente periodica.

Una funzione uniforme non può ammettere periodi che formino una successione tendente a zero; se due periodi hanno un rapporto razionale essi sono multipli di uno stesso periodo; una funzione uniforme non può ammettere due periodi aventi rapporto reale irrazionale; una funzione uniforme non può ammettere tre periodi indipendenti tali cioè da non aversi mai interi m, m', m'' per cui sia $m\omega + m'\omega' + m''\omega'' = 0$. Di una funzione uniforme doppiamente periodica si dice che 2ω, $2\omega'$ sono periodi elementari, quando ogni altro periodo si può esprimere nella forma $2m\omega + 2m'\omega'$ con m, m' interi; il rapporto $\omega : \omega'$ è complesso e si può sempre supporre che abbia il coefficiente della parte immaginaria positivo.

È detta funzione *ellittica* ogni funzione analitica uniforme doppiamente periodica che ammette a distanza finita soli poli. Il punto $x = \infty$ è singolare essenziale. Se 2ω, $2\omega'$ sono periodi elementari, tutti i valori di cui $f(x)$ è suscettibile sono presi in ciascuno dei parallelogrammi che ha per vertici $2m\omega + 2m'\omega'$, $2m\omega + 2(m' + 1)\omega'$, $2(m + 1)\omega + 2m'\omega'$, $2(m + 1)\omega + 2(m' + 1)\omega'$. Uno qualsivoglia di questi parallelogrammi dicesi *campo fondamentale*. Ogni funzione ellittica ha nel suo campo fondamentale dei poli, la somma dei cui ordini è l'*ordine* della funzione ellittica. Non esistono funzioni ellittiche di ordine 1; il numero degli zeri eguaglia il numero dei poli per ogni funzione ellittica; le somme dei punti di livello corrispondenti a qualunque valore a sono tutte fra loro congruenti rispetto ai periodi. Una funzione ellittica di dati periodi elementari è determinata, all'infuori di un fattore costante, dalle radici e dai poli; e, a meno di una costante additiva, dalla conoscenza delle frazioni semplici che ne caratterizzano i poli. Fra due funzioni ellittiche omoperiodiche passa una relazione algebrica. Una funzione ellittica è omoperiodica colla sua derivata. Fra una funzione ellittica e la sua derivata passa una relazione algebrica.

Se $f(x)$ è ellittica di secondo ordine, α, α_1 i suoi poli distinti, le radici di $f'(x)$ sono $a_1 = \frac{1}{2}(\alpha + \alpha_1)$, $a_2 = a_1 + \omega$, $a_3 = a_1 + \omega'$; $a_4 = a_1 + \omega + \omega'$ e di più $f'(x) = c\sqrt{\varphi(x)}$, ove $\varphi(x) = \prod_1^4 \{ f(x) - f(a_i) \}$; se i poli coincidono, le radici di $f'(x)$ sono $b_1 = \alpha + \omega$, $b_2 = \alpha + \omega'$, $b_3 = \alpha + \omega + \omega'$ e $f'(x) = c\sqrt{\psi(x)}$ ove $\psi(x) = \prod_1^3 \{ f(x) - f(b_i) \}$; $x = \int \frac{du}{c\sqrt{R(u)}}$ è l'inversa di $u = f(x)$ ove $R(u) = \varphi(x)$ nel primo caso e $R(u) = \psi(x)$ nel secondo caso.

(continua) F. SIBIRANI

C. V. L. CHARLIER. *Vorlesungen über die Grundzüge der Mathematischen Statistik.* Verlag Scientia, Lund.

F. VINCI. *Statistica metodologica.* Padova, La Litotipo, Editrice Universitaria, 1924.

Prendiamo occasione della pubblicazione di queste belle lezioni del valoroso professore dell'Istituto superiore di scienze economiche e commerciali di Bari, per parlare anche dell'opera classica dello CHARLIER, di cui la seconda edizione fu pubblicata qualche anno prima che apparisse il primo numero di questo *Bollettino*. Per quanto abbiano carattere diverso, quella del VINCI essendo destinata a studenti di scienze commerciali, mentre quella dello CHARLIER si rivolge ad un pubblico di matematici, le due opere si ispirano sostanzialmente agli stessi criteri ed entrambe costituiscono, ciascuna nel suo campo, esposizioni fra le più riuscite di una dottrina, ancora troppo ignorata da noi, nel campo dei cultori delle discipline matematiche.

La Statistica matematica ha origine nel secolo decimottavo. Il suo primo risultato positivo è costituito dal classico teorema di BERNOULLI, esprimente la legge dei grandi numeri. I matematici lo giudicano un teorema sperimentale; i fisici un teorema matematico, disse una volta scherzosamente il grande POINCARÉ, e nello scherzo è materia di profonda riflessione in quanto dimostra che trattasi di una verità, di cui solo assai tardi si è manifestamente chiarita la portata. Il teorema di BERNOULLI è un teorema matematico; non ci dice come un certo fenomeno si produrrà in natura, ma ci insegna a contare le probabilità delle singole combinazioni a priori possibili ed a prevedere quale fra tutte ha, in casi determinati, la probabilità massima. Ci insegna ancora a valutare come quella probabilità varia al variare del numero delle prove, o, ciò che torna allo stesso, al variare del numero delle combinazioni possibili. La parola probabilità ha un senso convenzionale e la teoria resta sempre formalmente impeccabile, qualunque esso sia, o meglio ancora qualunque sia la convenzione in base a cui si definisce che due casi sono ugualmente probabili. Sta all'esperienza decidere quale fra queste convenzioni meglio risponde alla realtà.

Le modalità che occorre supporre convenzionalmente verificate, perchè sussista formalmente il teorema di BERNOULLI, possono esprimersi come proprietà di uno schema teorico che si dice appunto lo schema di BERNOULLI. Esso rappresenta il tipo più semplice da cui possono farsi discendere, a norma del calcolo delle probabilità, quegli algoritmi analitici, che si dicono *curve di frequenza*, il cui studio costituisce l'oggetto fondamentale della Statistica matematica.

Sono curve di frequenza quelle che caratterizzano un fenomeno collettivo (*o fenomeno di massa*), nel senso che esprimono come un certo numero di individui si ripartiscono secondo un determinato carattere misurabile quantitativamente. Per esempio i coscritti secondo l'altezza; od i redditieri secòndo il reddito; o polizze di assicurazione secondo l'età. La più semplice delle curve di frequenza discende, a norma del calcolo della probabilità, dal teorema di BERNOULLI ed è la curva degli errori di GAUSS.

L'influenza di GAUSS sullo sviluppo della Statistica matematica è, a giudizio dello CHARLIER, negativa. Il successo della curva degli errori fu così strepitoso, che ubbriacò gli statistici, i quali per circa un secolo si sforzarono di violentare la natura, tentando invano di modellare sopra la curva degli errori ogni fenomeno collettivo. Di tale vizio è inquinata, per tacere di altro, tutta l'opera del QUETELET.

Devesi a LEXIS aver spezzato il circolo vizioso, chiaramente intuendo che la ricchezza delle forme che presentano nella realtà i fenomeni collettivi non poteva ricondursi ad un solo modello teorico e che quindi accanto allo schema di BERNOULLI altri dovessero concepirsi, atti a generare i diversi tipi di curve di frequenza. Il modo più semplice di rappresentare in concreto lo schema di BERNOULLI sta nell'immaginare una serie di m estrazioni ciascuna costituita da n prove, eseguite da urne la cui composizione non varia da serie a serie e da prova a prova. Può supporsi invece che la composizione varî da serie a serie, rimanendo la stessa per ciascuna prova della stessa serie e si ha allora lo schema detto appunto di LEXIS; può supporsi invece che varî da prova a prova, la variazione avvenendo colla stessa legge nelle successive serie e si ha lo schema che lo stesso Lexis disse di Poisson, in quanto le formule relative erano già state date da questo matematico, che aveva studiato appunto quali erano le probabilità delle singole combinazioni che si presentavano in successive estrazioni da un' urna, quando nell' urna non si rimetteva la palla estratta. Il raggruppamento delle ordinate intorno alla media è più accentuata per le curve di frequenza che discendono dallo schema di Poisson; intermedia per la curva degli errori, che discende dallo schema di Bernoulli; meno accentuato per le curve che discendono dallo schema di Lexis. Lexis disse ipernormale la distribuzione nel primo caso, normale nel secondo, iponormale nel terzo.

Lo sforzo degli statistici matematici successivi al Lexis si è concentrato in due punti:

a) cercare delle espressioni analitiche atte a rappresentare con approssimazione sempre maggiore un numero sempre più grande di curve di frequenze;

b) ricondurre le espressioni analitiche trovate alla dipendenza da schemi teorici, più complicati, ma analoghi a quelli di Bernoulli, Lexis, Poisson.

Nei riguardi di *a*) sono meravigliosi i risultati ottenuti da Carlo Pearson e dalla sua scuola. Le curve che prendono il nome da questo matematico corrispondono sostanzialmente agli integrali della equazione differenziale

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x - p}{a + bx + cx^2}\, y \tag{1}$$

e sono atte a rappresentare con estrema esattezza i più diversi tipi di fenomeni collettivi (1). Lo Charlier critica i risultati del Pearson ed ha ragione, se intende riferirsi ad alcune affrettate conclusioni, dovute ai discepoli più che al Maestro. Riconosce egli pertanto che le equazioni delle curve che ne risultano sono ottime formule interpolatrici. Ma ha il torto di dimenticare che esse possono farsi derivare da uno schema, non semplice invero, ma nella sostanza analogo a quello del Poisson.

Un tipo particolare delle curve pearsoniane che si ottiene quando le radici della equazione $ax + bx + c = 0$ sono uguali, ha

(1) Una esposizione elementare dei metodi del Pearson è contenuta nell'opera notissima dell'Elderton: *Frequency curves and correlation*, London, Layton.

richiamato in modo particolare la attenzione del VINCI. Esso dà luogo all'integrale

$$y = y_0 x^{-\nu} e^{-\frac{\gamma}{x}} \tag{2}$$

e può farsi discendere da uno schema ideato dal nostro CANTELLI, per spiegare, a norma del calcolo delle probabilità, la classica distribuzione paretiana dei redditti.

La (2) può esprimere appunto in seconda approssimazione la equazione di quella curva paretiana.

Tutte le formule pearsoniane esprimono la ordinata y come prodotto di due o tre funzioni della sola x. Ad esse lo CHARLIER preferisce altre espressioni analitiche che si presentano come combinazioni lineari di funzioni dell'argomento. Le equazioni che egli propone per le curve di frequenza sono di due tipi.

Di essi il tipo che egli dice A) è rappresentato in generale dalla equazione

$$\frac{1}{5} y = \varphi_0 + \beta_2 \varphi_0^{III} + \beta_4 \varphi_0^{IV} + \dots.$$

in cui è φ_0 la ordinata della ordinaria curva gaussiana e cioè

$$\varphi_0 = \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}},$$

e φ_0^{III}, φ_0^{IV}, ... sono le derivate terze, quarte, ..., di φ_0.

Il tipo che egli dice B) può rappresentarsi invece in generale con espressioni della forma

$$y = N \{ \Psi(x) + \gamma_2 \Delta^2 \Psi + \gamma_3 \Delta^3 \Psi + \dots \}$$

in cui è

$$\Psi(x) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^x}{x!}$$

ed il simbolo Δ indica la ordinaria differenza finita quale è espressa da

$$\Delta \Psi = \Psi(x) - \Psi(x-1).$$

Il calcolo numerico della φ_0 si fa, come notissimo, colle tavole di GAUSS. Tavole analoghe sono state calcolate dallo CHARLIER per le derivate φ_0^{III}, φ_0^{IV}, ... e dal BORTKIEWICZ per la funzione $\Psi(x)$.

LUIGI AMOROSO

W. Blaschke: *Vorlesungen über Differentialgeometrie* — II. *Affine Differentialgeometrie* (bearbeitet von Kurt Reidemeister). Verlag I. Springer, Berlin 1923, pag. IX+259.

Il nuovo volumetto del Blaschke è dedicato alla geometria del gruppo affine: campo di studi affatto recente. Non già che non esistessero risultati, anche di data remota, di geometria affine: ma ora essi compaiono allineati con le nuove reclute sotto la disciplina della teoria dei gruppi.

Era stato fatto, da circa un secolo, qualche assaggio in questo terreno: soltanto da pochi anni se n'è incominciata l'aratura meccanica per opera del Blaschke, del Pick, del Berwald, del Reidemeister e dei loro scolari; e la messe è stata abbondante.

Lo schema costruttivo di un qualsiasi ramo di geometria differenziale è sempre lo stesso: ad ogni elemento dell'ente che si studia (curva, superficie,....) si cerca di associare una configurazione geometrica semplice, invariante per le trasformazioni del gruppo in esame, ed alcuni invarianti di un certo ordine atti ad individuare gli intorni successivi dell'elemento. Nel gruppo dei movimenti e per lo studio delle curve sghembe sono il classico triedro mobile, l'arco e i due invarianti di curvatura che soddisfano alla bisogna.

La natura del gruppo suggerisce la scelta della configurazione geometrica più semplice dipendente dal comportamento locale dell'ente. Per le curve piane nel gruppo affine alla normale metrica vien sostituita la normale affine (diametro per il punto della parabola avente ivi con la curva contatto quadripunto); all'arco ordinario un arco affine (dipendente dalla stessa parabola e scelto in modo da soddisfare alla proprietà addittiva); e all'ordinaria curvatura una curvatura affine costante in ogni punto di una conica. S'incontrano in queste prime nozioni i nomi di Carnot, di Möbius, di Sylvester: ma solo ora, alla luce di un principio direttivo, esse divengono feconde.

Analogamente, per lo studio di una curva sghemba serve un triedro legato in modo affine alla curva (proposto da Winternitz; Cech ne ha rilevato il significato geometrico) e due invarianti affini di curvatura: e in relazione a questi elementi si ha un gruppo di formule analogo a quello di Frenet.

In questo volume, come nel precedente, il Blaschke dà notevole sviluppo allo studio integrale o in grande delle curve: da ciò il carattere di modernità di quest'opera.

Nel cap. II e in una parte del III sono raccolte le proprietà estremali di ovali, di coniche, di triangoli scoperte dal Brunn, dal MINKOWSKI, dal MOHRMANN, dal BLASCHKE stesso (che ha immaginato per alcuni problemi un procedimento di trasformazione di ovali analogo a quello di STEINER) e da altri: sono questi i risultati più nuovi e più belli della teoria delle curve.

La teoria delle superficie nel gruppo affine (cap. IV e V) è compendiata in due forme differenziali del 1° ordine, una quadratica e l'altra cubica, che uguagliate a zero rappresentano rispettiv. le linee asintotiche e le linee di DARBOUX sulla superficie. Esse differiscono dunque ciascuna per un fattore dalle analoghe introdotte da FUBINI per lo studio proiettivo di una superficie e che, come ha osservato FUBINI stesso, sono determinate a meno di un fattore comune.

Nel caso affine, rappresentando i punti della superficie con un sistema di coordinate cartesiane non omogenee, si ha facilmente la forma quadratica normale (invariante per affinità) di PICK-BLASCHKE (differente per un fattore, che la rende appunto invariante per affinità, dalla 2ª forma forma fondamentale di GAUSS nella teoria metrica); nel caso proiettivo invece la normalizzazione di FUBINI (stante l'arbitrarietà di un fattore d'omogeneità nelle coordinate) non può compiersi separatamente per le due forme quadratica e cubica, ma solo considerandole insieme: l'aver superata questa difficoltà (che non si era mai presentata per lo studio di superficie rispetto ad altri gruppi) è stato merito di FUBINI (la cui forma cubica, del resto, precede l'analoga del PICK).

La possibilità (che non ha riscontro nel caso proiettivo) di normalizzare, nel caso affine, la forma quadratica indipendentemente da quella cubica si manifesta geometricamente nel fatto che si può associare ad ogni punto della superficie un tetraedro, invariante per affinità, avente un vertice nel punto, come spigoli uscenti da esso le due tangenti asintotiche e la polare della retta all'infinito del piano tangente rispetto alla quadrica di LIE (normale affine), e come faccia opposta il piano all'infinito: e questi elementi dipendono solo dalla conoscenza delle asintotiche.

La stessa sostanziale diversità fra il caso affine e quello proiettivo risulta anche dal fatto che mentre nel primo le due forme individuano la superficie nel gruppo *finito* delle affinità conservanti i volumi, nel secondo le forme di FUBINI individuano la superficie nel gruppo *infinito* delle applicabilità proiettive (la cui idea appartiene pure a FUBINI).

Gli ultimi due capitoli (VI e VII) trattano di classi speciali di superficie, con particolare riguardo ai problemi « in grande ». La variazione dell'area affine di una superficie conduce alle superficie minime affini del BLASCHKE, già studiate dal FRANCK e dal DARBOUX che ne ha data una costruzione in termini finiti: il problema di estremare il volume di un' ovale con data area affine dà luogo invece alle superficie a curvatura media costante (necessariamente ellissoidi se a punti tutti ellittici). Particolare studio ricevono anche le sfere-affini (le cui normali affini passano per un punto proprio o improprio; si ritrovano classi di superficie studiate dal DARBOUX, dal TZITZÉICA etc.), le superficie di traslazione, le superficie con un gruppo transitivo di affinità conservanti i volumi, gli ellissoidi in relazione alle proprietà di estremo, alla costanza della curvatura affine (che li caratterizza fra le ovali) alla indeformabilità.

Ho appena accennato alla trama del volume, nè avrei potuto fare altrimenti: tanta è la ricchezza dei risultati che vi sono condensati. Chi vorrà leggerlo vi troverà piacevole interesse e per la novità degli argomenti trattati e perchè l'A. riesce a conservar sempre viva, anche attraverso il groviglio delle formole, la visione geometrica intuitiva delle questioni da cui muove.

E. BOMPIANI