
BOLLETTINO UNIONE MATEMATICA ITALIANA

UMI

Sunti di lavori italiani

* Lavori di: G. Sannia, M. Piazzolla-Beloch, G. Bigiavi, O. Nicoletti,
V. Giulotto, A. Palatini, M. La Rosa,

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1,
Vol. **3** (1924), n.2, p. 68–74.

Unione Matematica Italiana

[http:
//www.bdim.eu/item?id=BUMI_1924_1_3_2_68_0](http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1924_1_3_2_68_0)

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

SUNTI DI LAVORI ITALIANI

Geometria differenziale. — G. SANNIA: *Sulla geometria affine differenziale delle superficie rigate* « Giornale di Mat. » (In corso di stampa).

— — Idem: *Geometria differenziale dei reticolati piani invariante per un gruppo di collineazioni.* « Rend. del Circolo Mat. di Palermo » (In corso di stampa).

Nella geometria affine differenziale una superficie non sviluppabile si rappresenta con due forme differenziali, rispett. quadratica e cubica nei differenziali di due variabili, legate da certe relazioni differenziali; e ciò vale in particolare per le superficie rigate sghembe. Ora, nella prima Memoria, l'A. trova per tali superficie (e con procedimento diretto fondato sul *Calcolo differenziale assoluto con una variabile*) un'altra rappresentazione che è costituita da certe funzioni di una variabile aventi significato intrinseco ed invariante per affinità; poi aggiunge alcune semplici considerazioni sull'intorno di una generatrice che lo conducono a nuovi risultati, per es. all'estensione di noti teoremi sulle asintotiche ad altri sistemi di linee.

Un risultato piano può rappresentarsi con equazioni parametriche $x^{(i)} = x^{(i)}(u, v)$ ove le $x^{(i)}$ ($i = 1, 2, 3, 4$) sono coordinate omogenee; ma tale rappresentazione analitica non è intrinseca. Nella seconda Memoria l'A. espone un procedimento per la ricerca sistematica di una rappresentazione analitica intrinseca nella geometria piana euclidea, non euclidea, affine, proiettiva (e, in generale, in una geometria che raccolga le sole proprietà invarianti per collineazioni di un gruppo dato). Il procedimento è fondato essenzialmente sul *Calcolo differenziale semiassoluto* (che l'A. espone in principio) nel quale entrano in giuoco soltanto funzioni $f(u, v)$ che siano invarianti (relativi almeno) per ogni trasformazione invertibile del tipo $u = u(u'), v = v(v')$; in esso l'operazione di derivazione covariante rispetto ad una forma quadratica $adu^2 + 2hdudv + cdv^2$ (che è fondamentale nell'ordinario *Calcolo asso-*

tulo) vien sostituita da una *derivazione semicovariante* rispetto a un sistema di due differenziali parziali $a_{10}(u, v)du, a_{01}(u, v)dv$.

Rettifica. — Fu annunziato in questo Boll. (anno II, n. 2, pag. 61) che un'altra Memoria dell'A. (*Nuova trattazione della geometria proiettivo-differenziale delle curve sghembe*) sarebbe comparsa nei Rend. del Circ. Mat. di Palermo; invece una prima parte è comparsa negli Annali di Mat., serie IV, t. I, pag. 1, e la rimanente comparirà negli stessi Annali.

MARGHERITA PIAZZOLLA-BELOCHI: *Nuovo metodo per la classificazione delle curve situate sopra superficie cubiche.* « Giornale di Matematiche di Battaglini », vol. LIX, 1921.

L'A. indica un procedimento semplice per determinare tutti i tipi di curve algebriche d'ordine n , prive di singolarità, situate sopra una superficie generale del 3° ordine, giungendo a risultati più generali di quelli ottenuti da CREMONA, STURM ⁽¹⁾ e ROHN sullo stesso argomento.

Supposto che la curva abbia $a_1 = n - \alpha$ punti in comune con una retta della superficie, e $c_{12}, c_{13}, c_{14}, c_{15}, c_{16}$ punti in comune con le 5 rette della superficie che segano la prima, l'A. dimostra che il numero dei punti $a_2, a_3, \dots, a_6; b_1, b_2, \dots, b_6; c_{23}, c_{24}, \dots, c_{56}$, in cui la curva incontra ognuna delle altre rette della superficie, è espresso in funzione di $\alpha, c_{12}, c_{13}, c_{14}, c_{15}, c_{16}$, mediante equazioni del tipo

$$a_2 = \frac{1}{2} \left(n + \sum_{r=2}^6 c_{1r} \right) - \alpha - c_{12}, \text{ e analoghe per } a_3, a_4, a_5, a_6,$$

$$b_1 = \frac{1}{2} \left(n - \sum_{r=2}^6 c_{1r} \right) + \alpha,$$

$$b_2 = \alpha - c_{12}, \text{ e analoghe per } b_3, b_4, b_5, b_6,$$

$$c_{23} = \frac{1}{2} \left(n - \sum_{r=2}^6 c_{1r} \right) + c_{12} + c_{13}, \text{ e analoghe per } c_{24}, c_{25}, \dots, c_{56}.$$

Tra le $\alpha, c_{12}, c_{13}, c_{14}, c_{15}, c_{16}$ sussistono poi certe disuguaglianze, che permettono di determinare, per ogni valore di α , i possibili sistemi di valori delle $c_{12}, c_{13}, c_{14}, c_{15}, c_{16}$. Sostituendo nelle formule suddette, si ottengono i valori corrispondenti delle $a_2, a_3, \dots, a_6; b_1, b_2, \dots, b_6; c_{23}, c_{24}, \dots, c_{56}$, e quindi per ogni sistema

⁽¹⁾ L'A. ci prega di comunicare che l'indicazione bibliografica dell'importante memoria di R. STURM: *Über die Curven auf der allgemeinen Fläche dritter Ordnung.* « Math. Ann. », XXI, per errore tipografico, manca tra le citazioni fatte dall'A., sebbene ne siano citate le pagine.

di soluzioni trovate, un determinato tipo di curva algebrica di ordine n , priva di singolarità, segante una retta della superficie in $n - \alpha$ punti ($1 \leq \alpha \leq \frac{2n}{3}$).

L'A. applica questo procedimento ai casi:

- I) $\alpha = 1$ (curve razionali)
- II) $\alpha = 2$ (curve iperellittiche)
- III) $\alpha = 3$
- IV) valori massimi di α

enumerando per ognuno di questi casi i diversi tipi di curve d'ordine n , prive di singolarità, esistenti sulla superficie.

Meccanica. — C. BIGIAMI: *Di due speciali modificazioni alla legge di Newton, che, per lo spostamento del perielio e la deflessione dei raggi, conducono agli stessi risultati della Relatività.* « Annali di Matematica », 1924.

Nel breve scritto con questo titolo, che verrà pubblicato negli Annali, ho considerato due lievi modificazioni alla legge di Newton, espresse, la prima dal potenziale cinetico:

$$U = -\frac{\mu}{r} - \frac{z\mu v_n^2}{c^2 r} - \frac{\beta\mu}{c^2 r} \left(\frac{dr}{dt} \right)^2$$

e la seconda da una forza agente sul punto materiale mobile attratto che gli imprime un'accelerazione diretta verso quello attraente, supposto fisso, data da:

$$\frac{\mu}{r^2} + \frac{3\lambda\mu v_n^2}{c^2 r^2} + \frac{\gamma\mu}{c^2 r^2} \left[\left(\frac{dr}{dt} \right)^2 - 2r \frac{d^2 r}{dt^2} \right],$$

essendo $\mu = fM$, f la costante d'attrazione, M la massa attraente, c la velocità della luce, v_n la componente trasversale della velocità del punto mobile e $z, \beta, \lambda, \gamma$ due coppie di parametri.

In ambedue il moto è piano, ma soltanto per la seconda sussiste il teorema delle aree.

In modo facile ho trovato nei due casi i valori dello spostamento e della deflessione. Denotandoli con $\Sigma_1, \Delta_1; \Sigma_2, \Delta_2; \Sigma, \Delta$ rispettivamente nei due casi ed in quello della Relatività, abbiamo:

$$\begin{aligned} \Sigma_1 &= \frac{z + \beta}{1 + e} \pi, & \Sigma_2 &= -\frac{3\lambda + \gamma}{1 + e} \pi, & \Sigma &= \frac{3\pi}{1 + e} \\ \Delta_1 &= (1 + \beta)\varepsilon, & \Delta_2 &= (1 + 2\lambda - \gamma)\varepsilon, & \Delta &= 2\varepsilon, \end{aligned}$$

essendo e l'eccentricità dell'orbita nel caso dello spostamento del perielio, $\varepsilon = \frac{2\mu}{c^2 r_1}$ ed r_1 la distanza perielica.

Volendo quindi che le due modificazioni alla legge newtoniana coincidano colla Relatività nei risultati finali, dovremo fare: $\alpha = 2$, $\beta = 1$; $\lambda = 2$, $\gamma = 3$.

O. NICOLETTI: *Un teorema di limite*. « Annali di Matematica », S. IV, T. 1, 1924.

In questa nota l'A. dimostra il teorema generale seguente:

a) Sia $\varphi(\alpha, \beta, \gamma; n)$ una funzione reale delle quattro variabili α, β, γ, n , definita per i valori interi e non negativi di queste variabili; e, considerando la disuguaglianza (1) $\varphi(\alpha, \beta, \gamma; n) \geq 0$ (o l'uguaglianza $\varphi(\alpha, \beta, \gamma; n) = 0$), essa abbia, per ogni valore finito di n , un numero finito $\Omega(n)$ di soluzioni, in numeri interi e non negativi;

b) a ciascuna soluzione della (1) si dia un peso $p_{\alpha\beta\gamma, n}$, reale e positivo; e la somma $H(n) = \sum p_{\alpha\beta\gamma, n}$ dei pesi delle soluzioni della (1), tenda, per $n \rightarrow \infty$, all'infinito positivo;

c) detto h un numero positivo arbitrario, si dica $\Omega(n, h)$ il numero delle soluzioni della (1), nelle quali è insieme $\alpha \geq h$, $\beta \geq h$, $\gamma \geq h$; $H(n, h)$ la somma dei pesi relativi; e per h qualunque, si abbia $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{H(n, h)}{H(n)} = 1$;

d) siano a_n, b_n, c_n tre successioni, le quali, per $n \rightarrow \infty$, tendano a dei limiti finiti a, b, c ; e sia $f(xyz)$ una funzione delle 3 variabili x, y, z , definita e limitata in un campo C , cui appartenga il punto (abc) ed i punti (a_n, b_n, c_n) ; e posto, $P = (xyz)$, $P_0 = (a, b, c)$ si abbia in C

$$\lim_{P \rightarrow P_0} f(P) = L,$$

essendo L un numero determinato e finito.

In queste ipotesi, l'espressione

$$\theta(n) = \frac{1}{H(n)} \sum p_{\alpha\beta\gamma, n} f(a_n b_n c_n)$$

tende, per $n \rightarrow \infty$, al limite L .

Questo teorema comprende, come casi particolari, alcuni teoremi notevoli di CAUCHY, CESÀRO, IMSEN ed altri.

Esso può inoltre estendersi a successioni multiple, ed a particolari formule integrali.

Analisi. — V. GIULOTTO: *Funzioni sferiche poliarmoniche a due variabili*. « Annali di Matematica » (S. IV, T. I, 1924).

Dopo l'introduzione nell'analisi delle funzioni sferiche di LEGENDRE e di LAPLACE ne furono studiate altre analoghe o più generali. Tali sono le note funzioni toroidali di C. NEUMANN, le coniche di MEHLER, le cilindriche di BESSEL, le funzioni di LAMÉ, le funzioni di NIELSEN. Una generalizzazione della X_n di LEGENDRE data per mezzo della derivata n^{ma} , la considerazione di generatrici analoghe a quella della X_n , l'introduzione di parametri nell'equazione caratteristica della X_n , condussero rispettivamente ai polinomi di JACOBI (ai quali sono legati quelli di HERMITE, LAGUERRE, DERUYTS) alle funzioni di GEGENBAUER, TISSERAND, ESCARY e PINCHERLE, alle funzioni di HANSTED. Ad altra generalizzazione pervenne il DINI applicando la teoria dei residui, mentre l'HERMITE, il DIDON ed altri estesero a funzioni di due variabili, la definizione e le proprietà della X_n . Oltre a queste numerose ricerche, legate al polinomio di LEGENDRE, fu generalizzato il complesso delle funzioni sferiche in seguito agli studi iniziati dal CAYLEY aventi a fondamento l'equazione di LAPLACE in un iperspazio. In una memoria del 1903 dimostrai che si possono generalizzare le funzioni sferiche aumentando l'ordine dell'equazione di LAPLACE e, in un'altra del 1911, considerando funzioni armoniche d'ordine superiore in un iperspazio. Riprendendo ora le ricerche del 1903, allora condotte con riguardo alla sola funzione sferica q -armonica ad una variabile, studio le proprietà delle funzioni sferiche poliarmoniche a due variabili. Individuatene $2n+1$ fondamentali, con procedimento tracciato nella teoria ordinaria dal THOMSON, ottengo per esse espressioni che conducono ad una generalizzazione delle funzioni aggiunte, delle quali stabilisco l'equazione caratteristica, pervenendo poi agli stessi risultati con procedimento originale, dopo aver stabilita l'equazione differenziale della funzione sferica di LAPLACE, infine determino relazioni ricorrenti fra aggiunte e generalizzo la formula di addizione. Queste ricerche, con quelle del 1903, costituiscono una generalizzazione del complesso delle funzioni sferiche ordinarie: ciò che conferisce, a parer mio, interesse al presente lavoro dato che, come risulta dal precedente cenno bibliografico, la quasi totalità delle generalizzazioni si limitano al polinomio di LEGENDRE.

ATTILIO PALATINI: *Sopra i potenziali simmetrici che conducono alle soluzioni longitudinali delle equazioni gravitazionali di Einstein.* « Nuovo Cimento », serie VII, vol. XXVI, 1923, pp. 5-24.

Tra le soluzioni note delle equazioni gravitazionali di EINSTEIN hanno speciale interesse le *soluzioni longitudinali* di LEVI-CIVITA e le *soluzioni binarie* di WEYL; le prime, perchè ad esse appartiene l'ormai famosa soluzione di EINSTEIN-SCHWARZSCHILD; le seconde, perchè possono esser poste in corrispondenza biunivoca con gli ordinari potenziali simmetrici.

Si può dimostrare che le soluzioni longitudinali rientrano nelle soluzioni di WEYL e precisamente in corrispondenza ai potenziali newtoniani simmetrici di masse distribuite sopra un ellissoide rotondo allungato, sopra un iperboloide rotondo a due falde e lungo una retta indefinita.

Il primo degli accennati potenziali va associato alla soluzione di SCHWARZSCHILD. Il potenziale ordinario di un opportuno ellissoide viene dunque a corrispondere al campo einsteiniano di un'unica massa concentrata in un punto.

Di questo risultato si può fare un'applicazione notevole considerando l'analogo einsteiniano del potenziale newtoniano di due ellissoidi allungati di rotazione attorno al medesimo asse. Si giunge ad ottenere l'alterazione metrica einsteiniana dovuta a due masse concentrate in due punti.

ATTILIO PALATINI: *Sopra la deviazione dei raggi luminosi secondo il punto di vista newtoniano.* « Memorie della Società Astronomica Italiana », vol. II, 1923.

Lo spostamento secolare del perielio di MERCURIO si può spiegare modificando opportunamente la legge di gravitazione universale.

Alla nuova legge si connette questa questione. Uno dei fenomeni salienti che interessano la teoria di relatività è quello della deviazione dei raggi luminosi in un campo gravitazionale. Una deviazione si può giustificare anche prescindendo dalla teoria di EINSTEIN. Basta accettare il principio della materializzazione dell'energia, per cui i raggi luminosi vanno concepiti come traiettorie di punti materiali e perciò soggetti all'azione di un campo gravitazionale.

Ora se la legge di gravitazione è quella di NEWTON si trova che, nel caso di raggi luminosi che rasentino il bordo del sole, la deviazione dovrebbe esser di $0''.88$, giusto la metà di quella voluta dalla relatività. Se si accetta invece la legge di gravita-

zione mutata in modo da spiegare l'anomalia del perielio di MERCURIO, si trova una deviazione di $2'',64$.

La nuova legge dunque non può spiegare contemporaneamente i due fenomeni salienti della teoria di EINSTEIN, almeno nella misura stabilita dalla teoria stessa.

MICHELE LA ROSA: *Prove astronomiche contro la « teoria della relatività » ed una nuova teoria delle « stelle variabili »*. (Memoria della Società Astronomica Italiana, Nuova serie, T. II, Roma, 1924).

Il secondo postulato della teoria di EINSTEIN trova, secondo DE SOTTER, un'ottima conferma nei fenomeni offerti dalle « stelle doppie ». Questi fenomeni escluderebbero interamente la possibilità dell'ipotesi opposta — quella balistica — che salverebbe il principio di relatività, ammettendo che *la velocità della luce si possa comporre con quella della sorgente*.

Ora un'analisi più completa di questa seconda ipotesi ci ha condotto alle seguenti conclusioni importanti:

a) non è esatto che le osservazioni sulle « stelle doppie » smentiscano senz'altro l'ipotesi balistica, e provino indirettamente il postulato di EINSTEIN;

b) essa (ipotesi) conduce a prevedere che, *soddisfatte certe condizioni, le stelle doppie, o più complesse, debbono apparirci come « stelle variabili »*.

Sviluppando la discussione dei risultati che scaturiscono dalla *ipotesi balistica*, ci è riuscito di costruire una spiegazione limpida dei fatti osservati sulle « stelle variabili » e anche sulle « nuove » la quale rende conto anche dei particolari meno importanti.

La coincidenza fra lo schema teorico ed i fatti osservati è così perfetta da autorizzarci a vedere in questi una brillante conferma di quello; cioè a riguardare l'*ipotesi balistica* come confortata dalla prova di un numero di fatti astronomici grande ed interessante.

Questi fatti costituiscono una fortissima prova contro il secondo postulato della teoria della « relatività ristretta » e quindi contro tutto l'edificio di EINSTEIN.