
BOLLETTINO UNIONE MATEMATICA ITALIANA

F. SBRANA

Sulle derivate di ordine superiore delle funzioni composte

*Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie
1, Vol. 3 (1924), n.2, p. 65–67.*

Unione Matematica Italiana

[http:
//www.bdim.eu/item?id=BUMI_1924_1_3_2_65_0](http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1924_1_3_2_65_0)

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione
Matematica Italiana, 1924.

Sulle derivate di ordine superiore delle funzioni composte.

Nota di F. SBRANA

1. È noto che la derivata k^{ma} rapporto a t di una funzione composta $z[x(t)]$ è data dalla somma

$$(1) \quad \frac{d^k z}{dt^k} = \sum_1^k C_{k,h} \frac{d^h z}{dx^h},$$

dove i coefficienti $C_{k,h}$ sono indipendenti da z ; di questi lo SCHLÖMILCH ha ottenuto l'espressione

$$(2) \quad C_{k,h} = \frac{1}{h!} \left[\frac{\partial^k}{\partial \varphi^k} x(t+\varphi) - x(t)^{(k)} \right]_{\varphi=0} = \\ = \frac{1}{h!} \sum_1^h (-1)^{h-r} \binom{h}{r} x^{(r)}(t) \frac{d^h x^{(r)}(t)}{dt^h}.$$

(¹) Ved. SCHLÖMILCH, *Compendium der höheren Analysis*, II Bd., (1879), pag. 4 e seguenti.

Valendoci del procedimento usato dallo SCHLÖMILCH, ci proponiamo di stabilire formule analoghe alle (1), (2), per le derivate rapporto a t di una funzione $z[x(t), y(t)]$; mostriamo, inoltre, come lo stesso procedimento si possa applicare al calcolo delle derivate (rapporto a t) di una funzione composta $z[x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)]$ ⁽¹⁾.

2. Anzitutto, data la funzione $z[x(t), y(t)]$, si ha subito

$$(3) \quad \frac{d^k z}{dt^k} = \sum_{h=0}^k \sum_{s=0}^h C_{k, h, s} \frac{\partial^h z}{\partial x^s \partial y^{h-s}},$$

dove i coefficienti $C_{k, h, s}$ sono indipendenti da z . La (3) sussiste, infatti, per $k=1$; ammesso che valga per un valore di k , si trova verificata per il valore successivo $k+1$.

Per determinare i detti coefficienti, poniamo

$$z = e^{\alpha x(t) + \beta y(t)},$$

essendo α e β due variabili indipendenti. Risulta intanto

$$\frac{\partial^k e^{\alpha x(t) + \beta y(t)}}{\partial t^k} = e^{\alpha x(t) + \beta y(t)} \sum_{h=0}^k \sum_{s=0}^h C_{k, h, s} \alpha^s \beta^{h-s},$$

e per conseguenza

$$(4) \quad C_{k, h, s} = \frac{1}{s! (h-s)!} \left[\frac{\partial^h}{\partial x^s \partial \beta^{h-s}} \left\{ e^{-\alpha x(t) - \beta y(t)} \frac{\partial^k e^{\alpha x(t) + \beta y(t)}}{\partial t^k} \right\} \right]_{\alpha=\beta=0}.$$

D'altra parte, si ha pure

$$\frac{\partial^k e^{\alpha x(t) + \beta y(t)}}{\partial t^k} = \left[\frac{\partial^k}{\partial \rho^k} e^{\alpha x(t+\rho) + \beta y(t+\rho)} \right]_{\rho=0},$$

e perciò, sostituendo nella (4),

$$C_{k, h, s} = \frac{1}{s! (h-s)!} \left[\frac{\partial^h}{\partial \rho^h} \left\{ \frac{\partial^k e^{\alpha \theta_1 + \beta \theta_2}}{\partial x^s \partial \beta^{h-s}} \right\} \right]_{\alpha=\beta=0, \rho=0},$$

dove si è posto

$$\theta_1 = x(t+\rho) - x(t), \quad \theta_2 = y(t+\rho) - y(t)$$

infine

$$(5) \quad C_{k, h, s} = \frac{1}{s! (h-s)!} \left[\frac{\partial^h}{\partial \rho^h} \theta_1^s \theta_2^{h-s} \right]_{\rho=0} = \\ = \frac{1}{s! (h-s)!} \sum_{q=0}^s (-1)^q \binom{s}{q} x^{s-q}(t) \sum_{r=0}^{h-s} (-1)^r \binom{h-s}{r} y^{h-s-r}(t) \frac{d^h [x^q(t) y^r(t)]}{dt^h}.$$

(1) Per questo argomento (e la relativa bibliografia) ved. UGO AMALDI, *Sulle derivate successive delle funzioni composte di un numero qualunque di variabili*, Rend. del Circ. Mat. di Palermo, 1917, T. XLII, p. 94-115.

Come la (2), quest'ultima formula si potrebbe anche dimostrare col metodo d'induzione completa.

3. Notiamo ora che, data la funzione $z[x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)]$, si ha

$$(6) \quad \frac{d^k z}{dt^k} = \sum_1^{k+1} \sum_0^{s_1} \sum_0^{s_2} \sum_0^{s_3} \dots \sum_0^{s_{n-1}} C_{k, s_1, s_2, s_3, \dots, s_n} \times \\ \times \frac{\partial^{s_1} z}{\partial x_1^{s_1-s_2} \partial x_2^{s_2-s_3} \dots \partial x_{n-1}^{s_{n-1}-s_n} \partial x_n^{s_n}},$$

dove i coefficienti C sono indipendenti da z .

La (6) sussiste, intanto, per $k=1$. Ammesso che valga per un valore di k , derivando rapporto a t si ottiene

$$(7) \quad \frac{d^{k+1} z}{dt^{k+1}} = \sum_1^{k+1} \sum_0^{s_1} \sum_0^{s_2} \dots \sum_0^{s_{n-1}} \frac{d}{dt} (C_{k, s_1, s_2, \dots, s_n}) \frac{\partial^{s_1} z}{\partial x_1^{s_1-s_2} \dots \partial x_n^{s_n}} + \\ + \sum_1^n \frac{dx_m}{dt} \sum_1^k \sum_0^{s_1} \sum_0^{s_2} \dots \sum_0^{s_n} C_{k, s_1, s_2, \dots, s_n} \frac{\partial^{s_1+1} z}{\partial x_1^{s_1-s_2} \dots \partial x_m^{s_m+1-s_{m+1}} \dots \partial x_n^{s_n}}.$$

Se nell'ultimo termine si muta s_1+1 in s_1 , s_2+1 in s_2 , ..., s_m+1 in s_m , e si conviene che sia

$$C_{k, s_1-1, s_2-1, \dots, s_m-1, s_{m+1}, \dots, s_n} = 0,$$

quando uno degl'indici $s_1, s_2, \dots, s_m$ è nullo, ed inoltre

$$C_{k, s_1-1, s_2-1, \dots, s_m-1, s_m, s_{m+2}, \dots, s_n} = 0,$$

quello stesso termine diviene

$$\sum_2^{k+1} \sum_0^{s_1} \dots \sum_0^{s_{n-1}} \left(\sum_1^n \frac{dx_m}{dt} C_{k, s_1-1, s_2-1, \dots, s_m-1, s_{m+1}, \dots, s_n} \right) \frac{\partial^{s_1} z}{\partial x_1^{s_1-s_2} \dots \partial x_n^{s_n}},$$

il secondo membro della (7) si trasforma quindi facilmente nella somma

$$\sum_1^{k+1} \sum_0^{s_1} \dots \sum_0^{s_n} C_{k+1, s_1, s_2, \dots, s_n} \frac{\partial^{s_1} z}{\partial x_1^{s_1-s_2} \dots \partial x_n^{s_n}}.$$

Per mezzo della (6), si potrà poi procedere come nel numero precedente, ottenendo pei coefficienti C una formula analoga alla (5).