Bollettino
Unione Matematica
Italiana

Enrico Bompiani

# Contributi alla geometria proiettivo-differenziale di una superficie

*Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1*, Vol. **3** (1924), n.2, p. 49–56.

Unione Matematica Italiana

¡http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1924_1_3_2_49_0¿

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 1924.

# PICCOLE NOTE

## Contributi alla geometria proiettivo-differenziale di una superficie.

Nota di E. BOMPIANI

§ I. *Le linee di Darboux e di Segre.* — **1.** Data una superficie (non rigata) $\sigma$ dello spazio ordinario e fissate su $\sigma$ le linee asintotiche come linee coordinate di un sistema di coordinate curvilinee $u$, $v$, si possono *normalizzare*, con FUBINI, le coordinate proiettive omogenee dei suoi punti in modo ch'esse siano soluzioni del sistema di equazioni [1]

$$(1) \qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial^2 x}{\partial u^2} &= \frac{\partial \log \beta\gamma}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial u} + \beta\frac{\partial x}{\partial v} + nx \\ \frac{\partial^2 x}{\partial v^2} &= \frac{\partial \log \beta\gamma}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial v} + \gamma\frac{\partial x}{\partial u} + \nu x \end{aligned} \right. \qquad (\beta\gamma \neq 0)$$

per il quale si suppongono soddisfatte le condizioni d'integrabilità.

Le due *forme normali* di FUBINI

$$\varphi_2 = 2\beta\gamma du dv, \quad \varphi_3 = 2\beta\gamma(\beta du^3 + \gamma dv^3)$$

uguagliate a zero danno rispettiv. le linee asintotiche e le *linee di Darboux*: le tangenti a queste in un punto $P$ di $\sigma$ sono le rette triple dell'involuzione $I_3^2$ delle terne di tangenti in $P$ alle curve sezioni di $\sigma$ con le quadriche ad essa osculatrici in $P$.

I differenziali controvarianti rispetto a $\varphi_2$ s'indicheranno con $\delta$. Porremo anche $\frac{\partial x}{\partial u} = x_u, \ldots, \frac{dv}{du} = v'$.

[1] G. FUBINI: *Fondamenti della geometria proiettivo-differenziale di una superficie.* Atti Accad. di Torino, vol. LIII, 1918; Rend. Accad. dei Lincei, vol. XXVII, 1918, 2 Note.

**2.** Dall'equazione delle linee di DARBOUX $\beta du^3 + \gamma dv^3 = 0$ differenziata controvariantemente rispetto a $\varphi_2$ (e tenuto conto del Lemma di RICCI) si ricava

$$(2) \qquad du\delta^2 v - dv\delta^2 u = -\frac{2}{3}(h_1 du - h_2 dv) du dv$$

con

$$h_1 = \frac{\partial \log \beta\gamma^2}{\partial u}, \quad h_2 = \frac{\partial \log \beta^2\gamma}{\partial v}.$$

L'equazione del piano osculatore ad una di queste linee è quindi [2]

$$(3) \qquad T\left[-\frac{2}{3}(h_1 du - h_2 dv) du dv + \beta du^3 - \gamma dv^3\right] + \\ + 2[N_1 du + N_2 dv] du dv = 0$$

quando si tenga conto del vincolo $\beta du^3 + \gamma dv^3 = 0$. In forza di questo la (3) si trascrive

$$(4) \qquad v_i'^2\left[\frac{1}{3}h_2 T + N_2\right] + v_i'\left[-\frac{1}{3}h_1 T + N_1\right] + \beta T = 0$$

essendo $v_i'$ radice dell'equazione $\gamma v'^3 + \beta = 0$.

Indichiamo con $v'_i$, $v'_{i+1}$, $v'_{i+2}$ le tre radici di questa (ritenendo uguali indici congruenti rispetto al mod. 3) e consideriamo la retta intersezione dei piani osculatori alle due linee di DARBOUX corrispondenti a $v'_i$ e a $v'_{i+1}$.

Un piano generico per questa retta ha un'equazione del tipo

$$(5) \qquad (\lambda v_i'^2 + \mu v'^2_{i+1})\left[\frac{1}{3}h_2 T + N_2\right] + (\lambda v_i' + \mu v'_{i+1})\left[-\frac{1}{3}h_1 T + N_2\right] + \\ + \beta T(\lambda + \mu) = 0.$$

Esso contiene la terza tangente di DARBOUX, relativa a $v'_{i+2}$, se si pone $\lambda = v'_{i+1}(v'_{i+2} - v'_{i+1})$, $\mu = v'_i(v'_i - v'_{i+2})$; e il piano determinato da questa condizione ha l'equazione

$$(6) \qquad v'^2_{i+2}\left[\frac{1}{3}h_2 T + N_2\right] + v'_{i+2}\left[-\frac{1}{3}h_1 T + N_1\right] - 2\beta T = 0.$$

[2] V. *Fondamenti* etc. (Torino), equaz. (7); ivi è $T = |X, x, x_u, x_v|$, $N_1 = |X, x, x_u, x_{uv}|$, $N_2 = |X, x, x_v, x_{uv}|$ essendo le $X_i$ coordinate correnti. Avremo bisogno in seguito della posizione $\Omega = |X, x_u, x_v, x_{uv}|$.

**3.** Insieme alle linee di DARBOUX consideriamo le linee di SEGRE, definite da $\beta du^3 - \gamma dv^3 = 0$ (le tangenti a queste in $P$ sono coniugate, nel senso di DUPIN, alle tangenti di DARBOUX [3]).

Il piano del fascio (5) contenente la tangente di SEGRE coniugata alla terza tangente di DARBOUX, cioè corrispondente a $-v'_{i+2}$ ha per equazione

$$v'_{i+2}\left[\frac{1}{3}h_2 T + N_2\right] - \left[-\frac{1}{3}h_1 T + N_1\right] = 0 \tag{7}$$

cioè contiene la retta di equazioni $-\frac{1}{3}h_1 T + N_1 = 0$, $\frac{1}{3}h_2 T + N_2 = 0$.

Tenuto conto delle espressioni di $h_1$, $h_2$ queste rappresentano la *retta di Segre* (cioè la retta per la quale, secondo un risultato di CECH [4] vanno a passare i piani osculatori nel punto alle tre linee di SEGRE); sicchè per il modo con cui siamo pervenuti alla (7) essa esprime che:

*I piani osculatori in un punto a due linee di Darboux e alla linea di Segre coniugata alla rimanente formano fascio.*

**4.** Posto per brevità $S_1 = -\frac{1}{3}h_1 T + N_1$, $S_2 = \frac{1}{3}h_2 T + N_2$, come equazioni della retta asse del fascio ora nominato possono assumersi due qualsiansi delle seguenti

$$v'_{i+2}\gamma T + S_2 = 0, \quad v'_{i+2} S_1 - \beta T = 0, \quad v'_{i+2} S_2 - S_1 = 0. \tag{8}$$

Eliminando $v'_{i+2}$ fra le due prime si ha $\beta\gamma T^2 + S_1 S_2 = 0$ (che non contiene più traccia delle $v'_i$, quindi è la) equazione del cono individuato dalle intersezioni delle coppie di piani osculatori alle linee di DARBOUX e dalle tangenti asintotiche. La forma dell'equazione mostra che la retta di SEGRE è la polare del piano tangente (nel punto che si considera, a $\sigma$) rispetto a questo cono. Analogamente può dirsi degli altri due coni $S_1^2 - \beta S_2 T = 0$, $S_2^2 + \gamma S_1 T = 0$; si ha perciò il teorema:

***Si considerino i coni quadrici aventi per generatrici le intersezioni delle coppie di piani osculatori alle linee di Darboux e due delle***

(3) SEGRE: *Complementi alla teoria delle tangenti coniugate* etc. Rend. Lincei, vol. XVII, 1908.

(4) E. CECH: *L'intorno di un punto di una superficie considerato dal punto di vista proiettivo.* Annali di Matem., s. III, t. XXXI, 1922, n. 7. Per le equazioni della retta di SEGRE (o asse) nelle notazioni adottate v. FUBINI: *Alcuni risultati di geometria proiettivo-differenziale.* Rend. Lincei, 2 Note, vol. XXXII, 1923; nota 2ª, § 11.

*tre seguenti: tangenti asintotiche, retta di Segre. Il piano di due di queste rette ha per polare, rispetto al cono che le contiene, la retta residua.*

**5.** Questo teorema dà modo di costruire la retta di SEGRE in un punto noti i piani ivi osculatori alle linee di DARBOUX. Un altro modo scende dalla (6). Consideriamo i quattro piani seguenti passanti per una tangente di DARBOUX:

1) il piano ivi osculatore alla linea di DARBOUX

$$v'_{i+2}[S_1 + v'_{i+2}S_2] + \beta T = 0;$$

2) il piano contenente l'intersezione degli altri due piani osculatori di DARBOUX

$$v'_{i+2}[S_1 + v'_{i+2}S_2] - 2\beta T = 0;$$

3) il piano contenente la retta di SEGRE, $S_1 + v'_{i+2}S_2 = 0$;

4) il piano tangente $T = 0$;

*Il birapporto di questi quattro piani vale* $-\frac{1}{2}$; quindi il terzo si sa costruire noti gli altri; eseguendo la costruzione per due delle tangenti di DARBOUX si ha la retta di SEGRE.

**6.** Le considerazioni precedenti permettono la *costruzione di invarianti della superficie (per applicabilità proiettive)* di significato geometrico immediato.

Si consideri il *piano canonico* ([5]) relativo ad un punto $P$ di $\sigma$ e l'intersezione di esso con uno dei piani osculatori di DARBOUX. Calcoliamo il birapporto di questa retta con la tangente canonica, la retta di SEGRE e la normale proiettiva. Queste quattro rette si ottengono congiungendo il punto $P(x)$ con il punto $x_{uv} - \frac{\lambda}{3}(h_2 x_u + h_1 x_v)$ in corrispondenza ai valori di $\lambda$:

$$\lambda_i = \frac{h_1 v_i - h_2 v_i^2 + 3\beta}{h_1 v_i - h_2 v_i^2}, \quad \lambda = 0, \quad \lambda = 1, \quad \lambda = \infty$$

quindi il birapporto vale

$$1 - \lambda_i = \frac{3(\beta\gamma)^{2/3}}{\varepsilon_i \gamma^{1/3} h_1 + \varepsilon_i^2 \beta^{1/3} h_2} \qquad (\varepsilon_i^3 = 1).$$

([5]) G. FUBINI: *Alcuni risultati* etc. l. c.; Nota 2ª, § 11.

Per avere un invariante razionale basta prendere il prodotto dei tre birapporti relativi alle tre tangenti di **Darboux** e si ha

$$\prod_1^3{}_i(1-\lambda_i)=\frac{27(\beta\gamma)^2}{\gamma h_1{}^3+\beta h_2{}^3};$$

tale è pure la somma

$$\sum_1^3{}_i(1-\lambda_i)=-\frac{9\beta\gamma h_1 h_2}{\gamma h_1{}^3+\beta h_2{}^3};$$

il rapporto fra i due precedenti dà il significato geometrico dell'invariante $h_1h_2/\beta\gamma$.

**7.** Dal secondo degli invarianti precedenti si ha una caratterizzazione geometrica delle superficie per le quali $h_1=0$, $h_2\neq0$ (o viceversa). S'intende che non dev'essere $h_1=h_2=0$ altrimenti il piano canonico non è determinato.

Una proprietà geometrica caratteristica di queste ultime superficie si ha dall'ispezione della (2). Per $h_1=h_2=0$ essa rappresenta le geodetiche di $\varphi_2$. Viceversa se le linee di Darboux sono geodetiche $h_1=h_2=0$. Quindi:

*Condizione necessaria e sufficiente affinchè una superficie sia a linee canoniche indeterminate è che le sue lineè di Darboux siano geodetiche della forma quadratica normale $\varphi_2$.*

*Per le altre superficie ($h_1=0$, $h_2\neq0$) è proprietà caratteristica avere per linee canoniche un sistema di asintotiche.*

§ II. *La quadrica di Lie.* — **8.** Un'altra caratterizzazione geometrica delle due classi di superficie precedenti può darsi per mezzo della quadrica di Lie.

È noto che s'indica così la quadrica osculatrice lungo la generatrice passante per $P$ di $\sigma$ alla rigata delle tangenti asintotiche di un sistema circoscritta a $\sigma$ lungo l'asintotica dell'altro sistema passante per $P$. La quadrica non muta scambiando nella costruzione le asintotiche dei due sistemi.

La sua equazione, nelle notazioni attuali, è (6)

$$T\Omega-N_1N_2=-\frac{1}{2}\beta\gamma HT^2 \tag{9}$$

(6) L'equazione della quadrica di Lie, per una qualsiasi scelta delle coordinate proiettive (cioè senza specializzare il fattore di normalizzazione) si trova in una aggiunta di F. Engel ad una Nota di P. Frank: *Asymptotenebenen eines Flächenpunktes.* (Mathem. Zeitschrift, Bd. 11, 1921).

ove $\Omega = |X, x_{uv}, x_u, x_v|$ e $H = -\frac{1}{\beta\gamma}\left(\frac{\partial^2 \log \beta\gamma}{\partial u \partial v} + \beta\gamma\right)$ è la curvatura proiettiva media secondo FUBINI.

Al variare di $P$ su $\sigma$ la quadrica di LIE varia in un sistema generalmente $\infty^2$: essa tocca la superficie inviluppo, oltre che in $P$, in quattro punti vertici di un quadrangolo, che si dirà di DEMOULIN [7], di cui quattro lati appartengono alla quadrica di LIE e i due rimanenti sono reciproci rispetto ad essa.

Poichè

$$(10)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial u} &= \frac{\partial \log \beta\gamma}{\partial u} T + N_1, \quad \frac{\partial T}{\partial v} = \frac{\partial \log \beta\gamma}{\partial v} T - N_2 \\ \frac{\partial \Omega}{\partial u} &= 2\frac{\partial \log \beta\gamma}{\partial u}\Omega + nN_2 + \left(\beta\nu + \frac{\partial n}{\partial v}\right) T \\ \frac{\partial N_1}{\partial u} &= 2\frac{\partial \log \beta\gamma}{\partial u} N_1 + \beta N_2 + \left(\beta \frac{\partial \log \beta^2\gamma}{\partial v} + n\right) T \\ \frac{\partial N_2}{\partial u} &= \Omega + \frac{\partial \log \beta\gamma}{\partial u} N_2 + \beta\gamma H T \end{aligned}\right.$$

derivando la (9) rispetto ad $u$ si ha

$$3\frac{\partial \log \beta\gamma}{\partial u}(T\Omega - N_1 N_2) - \beta N_2^2 - \beta\frac{\partial \log \beta^2\gamma}{\partial v} T N_2 =$$
$$= -\left[\beta\gamma H \frac{\partial \log \beta\gamma}{\partial u} + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial u}(\beta\gamma H) + \beta\nu + \frac{\partial n}{\partial v}\right] T.$$

Tenuto conto della (9) stessa e della condizione d'integrabilità

$$\frac{\partial}{\partial v}\left\{\frac{\partial^2 \log \beta\gamma}{\partial u^2} - \frac{1}{2}\left[\frac{\partial \log \beta\gamma}{\partial u}\right]^2 - \beta\frac{\partial \log \beta^2\gamma}{\partial v} - 2n\right\} + \beta\gamma\frac{\partial \log \beta\gamma^2}{\partial u} = 0$$

si ha l'equazione valida sulla superficie inviluppo

$$(11)\qquad 2N_2^2 + 2\frac{\partial \log \beta^2\gamma}{\partial v} T N_2 + \Gamma_1 T^2 = 0$$

e analogamente si avrebbe l'altra

$$(12)\qquad 2N_1^2 - 2\frac{\partial \log \beta\gamma^2}{\partial u} T N_1 + \Gamma_2 T^2 = 0$$

(7) Perchè già considerato dal DEMOULIN: *Sur la quadrique de Lie*. (C. R. de l'Acad. des Sciences, t. 147, 1908).

ove

$$\Gamma_1 = \frac{1}{\beta}\frac{\partial}{\partial v}\left(\beta\frac{\partial \log \beta^2\gamma}{\partial v}\right) - \gamma\frac{\partial \log \beta\gamma^2}{\partial u} - 2\nu = \frac{1}{\beta}\frac{\partial}{\partial v}(\beta h_2) - \gamma h_1 - 2\nu$$

$$\Gamma_2 = \frac{1}{\gamma}\frac{\partial}{\partial u}\left(\gamma\frac{\partial \log \beta\gamma^2}{\partial u}\right) - \beta\frac{\partial \log \beta^2\gamma}{\partial v} - 2n = \frac{1}{\gamma}\frac{\partial}{\partial u}(\gamma h_1) - \beta h_2 - 2n.$$

Se indichiamo brevemente con $N_1 = k_i T$ le equazioni staccate dei due piani (12), e con $N_2 = l_i T$ quelle dei piani (11) ($i = 1, 2$) le equazioni dei lati del quadrangolo di DEMOULIN appartenenti alla quadrica di LIE sono

$$(13) \qquad \begin{cases} \Omega - k_i N_2 = -\frac{1}{2}\beta\gamma HT \\ N_1 = k_i T \end{cases} \qquad \begin{cases} \Omega - l_i N = -\frac{1}{2}\beta\gamma HT \\ N_2 = l_i T \end{cases} \qquad (i = 1, 2).$$

La retta per $P$ appoggiata agli altri due lati del quadrangolo di DEMOULIN ha le equazioni $N_1 = \frac{1}{2} h_1 T$, $N_2 = -\frac{1}{2} h_2 T$ che rappresentano la direttrice di WILCZYNSKI passante per $P$. Sicchè:

*La retta per* P *appoggiata ai due lati opposti del quadrangolo di Demoulin polari rispetto alla quadrica di Lie è una direttrice di Wilczynski.*

**9.** Per ciascuna tangente asintotica in $P$ consideriamo i quattro piani seguenti: il piano tangente, il piano normale (contenente la normale proiettiva) e i due piani contenenti i due lati del quadrangolo di DEMOULIN appoggiati a detta tangente. Uno dei loro birapporti è un invariante proiettivo; per avere un invariante razionale basta fare il prodotto di due convenienti di essi.

Si hanno così, per $h_1 h_2 \neq 0$, i *due invarianti per collineazioni* $\Gamma_1/h_2^2$, $\Gamma_2/h_1^2$ (per collineazioni e non per applicabilità proiettive perchè $\Gamma_1$ e $\Gamma_2$ contengono $n$ e $\nu$).

Se invece $h_1 = 0$, p. es., la (11) mostra che i quattro piani considerati per la tangente alla asintotica $u (dv = 0)$ in $P$ formano gruppo armonico. Quindi:

*Proprietà caratteristica delle superficie per le quali* $h_1 = 0$ *o* $h_2 = 0$ *(oltre a quella del n.° 7) è che formano gruppi armonici i quattro piani sopra nominati passanti per una tangente asintotica.*

*Se lo stesso fatto accade per tutt'e due le tangenti asintotiche la superficie è a linee canoniche indeterminate e viceversa.*

**10.** Altra proprietà caratteristica di queste ultime superficie è la seguente: *esse sono tutte proiettivamente applicabili sulla superficie cubica* $xyz = 1$.

Infatti se $h_1 = h_2 = 0$ si può, con eventuale cambiamento dei parametri $u$, $v$, porre $\beta = \gamma = 1$. Le equazioni da integrare sono $\frac{\partial^2 x}{\partial u^2} = \frac{\partial x}{\partial v} + \mu x$, $\frac{\partial^2 x}{\partial v^2} = \frac{\partial x}{\partial u} + \nu x$ e per le condizioni d'integrabilità $\mu = ku + a$, $\nu = kv + b$ ($k$, $a$, $b$ costanti). Se $k \neq 0$ si può fare $a = b = 0$. Le superficie cercate sono tutte applicabili proiettivamente su quelle soddisfacenti al sistema $\frac{\partial^2 x}{\partial u^2} = \frac{\partial x}{\partial v}$, $\frac{\partial^2 x}{\partial v^2} = \frac{\partial x}{\partial u}$ e queste, a meno di collineazioni, si riducono alla superficie $xyz = 1$ (8).

Se poi si tiene conto dell'equazione differenziale delle linee proiettive di curvatura (9), che per $\beta = \gamma = 1$ si riduce a $\mu du^2 = \nu dv^2$, si vede che *fra le superficie a linee canoniche indeterminate, la superficie cubica* $xyz = 1$ *è l'unica (a meno di collineazioni) le cui normali proiettive passino per un punto* (è l'analogo proiettivo della sfera). *(continua)*

(8) L'ultimo sistema di equazioni a deriv. parziali è stato incontrato da E. J. Wilczynski: *On a certain class of self projective surfaces* (Transactions of the Amer. Math. Soc., vol. XIV, 1913) senza dare al risultato il significato qui indicato (la nozione di applicabilità proiettiva è posteriore).

(9) G. Fubini: *Fondamenti* etc. (Torino), § 2, p. 1038.